الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة تيسمسيلت

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

مطبوعة علمية بعنوان

محاضرات فى بحوث العمليات

من إعداد

الأستاذ الدكتور/ عيسى دراجي

موجهة إلى طلبة الليسانس والماستر

- العلوم الاقتصادية
- علوم التسيير
- العلوم التجارية

السنة الجامعية 2024/2023

فهرس المحتويات

المقدمة

بدأ استخدام بحوث العمليات لأول مرة أثناء الحرب العالمية الثانية ففي عام 1940 بالمملكة المتحدة عهدت الإدارة العسكرية إلى فريق من العلماء والباحثين وذوي اختصاصات مختلفة مهمة العمل على دراسة العمليات المرتبطة بالدفاع الجوي والبري ودراسة المشاكل الإستراتيجية والتعرف على أفضل استخدام ممكن للمعدات العسكرية المتاحة، ثم طورت هذه العلوم وطبقتها للاستفادة منها في بقية قطاعات الحياة المختلفة مما أدى بها إلى جني ثمار ما توصلت إليه من نتائج جيدة في كل قطاعات الحياة الاقتصادية، الشيء الذي ادى ببقية الدول الأخرى على الاهتمام بهذا العلم ومنها الولايات المتحدة الأمريكية التي هي الأخرى استفادت من تطبيقاته في قطاعات الحياة الأخرى حيث ظهر الاهتمام بشكل جدي بدارسة النمو الاقتصادي لتلك البلدان وبذلك استخدمت " البرامج الخطية " التي تعد إحدى أساليب بحوث العمليات في تخصيص الموارد أو الطاقات المحدودة للحصول على أهداف معينة، وفي هذا الشأن تم تطوير الأساليب الرياضية لتشمل ميادين واسعة من المتغيرات المؤثرة في المشاكل المدروسة. ومما ساعد على سرعة تطوير أساليب بحوث العمليات هو ظهور الحاسب الإلكتروني وتطوره السريع وتطور نظم تخزين المعلومات واستخدام الحاسبات على نطاق واسع.

وبعد انتهاء الحرب العالمية الثانية عاد معظم العلماء الاختصاصين في لجان بحوث العمليات إلى الحياة المدنية محاولين تطبيق بحوث العمليات لمعضلات مدنية مشابهة وقامت بتدريسها في الجامعات واستفادت من تطبيقاتها شركات صناعية كثيرة، ومن أوائل تطبيقات بحوث العمليات كانت في المؤسسات الكبيرة ذات الأرباح العالية، حيث أخذت الشركات النفطية بتطبيق أسلوب البرمجة الخطية في تخطيط الإنتاج وبأوسع المستويات.

I. تعريف بحوث العمليات:

هناك العديد من التعاريف التي عرفتها بحوث العمليات ومن أبرزها التعريف الذي اعتمدته جمعية بحوث العمليات البريطانية حيث عرفت بحوث العمليات بأنها: "استخدام الأساليب العلمية لحل المعضلات المعقدة في إدارة أنظمة كبيرة من القوى العاملة، المعدات، المواد الأولية والأموال في المصانع والمؤسسات الحكومية وفي القوات المسلحة".

كما عرفتها جمعية بحوث العمليات الأمريكية بـ: "ترتبط بحوث العمليات باتخاذ القرارات العلمية حول كيفية تصميم وعمل أنظمة المعدات- القوى العاملة وفقاً لشروط تتطلب تخصيصا في الموارد النادرة.

وعرفها "واجنر": بحوث العمليات هي العلم المستخدم في حل المشكلات التي تصادف الإدارة العليا للمشروعات ولا يعطى هذا التعريف مفهوماً واضحاً لبحوث العمليات فهو يقيدها بحل المشكلات، كما يحدد نطاقها بالإدارة العليا للمشروعات وبحوث العمليات يتسع نطاقها عن هذا التعريف، فهي تتعلق باتخاذ القرارات سواءً على نطاق الإدارة التنفيذية أو الإدارة العليا للمشروع.

وعرفها "مورس، وكمبال": بأنها تطبيق الطريقة العلمية بتوفير الأساس الكمي الذي يمكن الإدارة من اتخاذ القرارات. هذا التعريف يحدد العناصر الرئيسية لبحوث العمليات وهي استخدام الطريقة العلمية وتوفير الأساس الكمي في اتخاذ القرارات الإدارية، إلا أن التعريف يمكن أن يكون تعريفاً مناسباً لأساليب الإدارة الأخرى التي ترتكز على الأساس الكمي مثل محاسبة التكاليف.

ومن التعاريف السابقة يمكننا أن نخلص الى الاتفاق على بعض الخصائص التي تحدد تريف موحد لبحوث العمليات وهي:

- استخدام الطريقة العلمية
- الارتكاز على الأساس الكمي ممثلاً في أدوات وأساليب بحوث العمليات
- تمكين الإدارة من اتخاذ قرارات أكثر موضوعية

وعلى أساس ذلك يمكننا وضع تعريف محدد لبحوث العمليات بأنها تطبيق الطريقة العلمية بتوفير الأساس الكمي باستخدام أدوات وأساليب بحوث العمليات كالبرامج الخطية وشبكة الأعمال وذلك لتمكين الإدارة من اتخاذ قرار أكثر موضوعية.

II. اهتمام بحوث العمليات

تهتم بحوث العمليات بدارسة مشاكل الأمثلية التي تهدف إلى تعظيم أو تدنية دالة الهدف التي تمثل عدد محدد من المتغيرات التي قد تكون مستقلة أو مرتبطة بعضها البعض من خلال أحد أو مجموعة من القيود، والتي طبقت في كثير من المجالات سواء الاقتصادية منها أو الهندسية أو الفيزياء، وقد أعطت النظرية الكلاسيكية في تحديد الأمثلية نتائج رائعة في مجال النظرية الكلاسيكية للإنتاج والاستهلاك. إلا أنه في الآونة الأخيرة ظهرت حالات مهمة في مجال تحديد الأمثلية في المجال الاقتصادي والعسكري والمالية العامة والتصنيع يصعب حلها في الأسلوب الكلاسيكي لتحديد الأمثلية مما أدى إلى تطوير هذه الأساليب ضمن ما يعرف في مشاكل البرمجة الرياضية التي تعد إحدى أساليب بحوث العمليات فظلا عن الأساليب الاحتمالية. وبذلك فهي تدور حول استخدام التحليل الكمي لمساعدة الإدارة على اتخاذ القرارات مستخدمة الأساليب الرياضية المتقدمة والأدوات العلمية لحل تلك المشاكل التي تتعلق بالعمليات الخاصة بأي نظام يهدف تقديم الحل الأمثل لهذه المشاكل.

III. أسباب ظهور بحوث العمليات:

من الأسباب التي ساعدت على ظهور وتطور أساليب بحوث العمليات واستخدامها على نطاق واسع نجد:

1. الحاجة الماسة لمتخذي القرارات لمثل هذه الاساليب العلمية لحل المشاكل التي تعترضهم في تسيير منظماتهم بحكم ان الأسلوب الارتجال والحكم الشخصي لوحده لا يكفيان للتصدي لهذه المشاكل وحلها بطريقة فعالة، وأساليب بحوث العمليات تمثل أداة فاعلة في أيدي هؤلاء المسيرين؛
2. الرغبة في الحصول على حلول مثلى دون مخاطرة من قبل متخذي القرارات
3. النتائج الجيدة التي تحصل عليها مستخدمو اسلوب بحوث العمليات اثناء الحرب العالمية الثانية شجع على تطبيق نفس الأساليب في الأعمال المدنية التي أعطت بدورها نتائج ممتازة؛
4. التقدم التكنولوجي المتسارع والاستخدام الواسع لأجهزة الحاسوب التي تتسم بالسرعة العالية والدقة وتطوير البرمجيات التي تسهل كثيرا حل المشاكل المختلفة قد ساهم في تطوير المناهج المختلفة في هذا العلم ووفر وسيلة مساعدة للطلاب والباحثين في جميع التخصصات والعلوم.

IV. وظائف بحوث العمليات:

من الوظائف الرئيسية لأساليب بحوث العمليات نجد:

- مساعدة متخذ القرار في عملية اتخاذ القرار
- اعطاء الحلول لمختلف المشاكل التي تعترض المسيرين بشكل دقيق وفعال
- تعتبر أداة فعالة في مجال البحث العلمي وتطويره

- يوفر أداة مهمة لدراسة ردود الفعل وتحليل الحساسية للكثير من القرارات المتخذة.

V. المراحل الأساسية في بحوث العمليات:

تمر عملية استخدام اسلوب بحوث العمليات في حل المشاكل التي تعترض المسير او متخذ القرارات بعدة مراحل نوردها في التالي على الترتيب:

1- صياغة المشكلة قيد البحث.
2- عمل نموذج للمشكلة.
3- إيجاد حل للنموذج.
4- اختبار النموذج والحل الناتج عن استخدام النموذج.
5- وضع رقابة على الحل.
6- تطبيق الحل.

VI. شروط تطبيق بحوث العمليات:

يشترط في تطبيق اساليب بحوث العمليات في حل المشكلات شرطين اساسيين هما:

1. **محدودية الموارد**: يجب ان تكون الموارد المتاحة والتي تستعملها منظمة الاعمال سواء مان ذلك في العملية الانتاجية او التجارية او الخدمية محدودة الكمية وينطبق ذلك على ما يلي:
   - الموارد المالية.
   - الموارد البشرية ذات الكفاءة العالية والمتخصصة.
   - الموارد الاولية التي يتم الحصول عليها مقابل ثمن وتؤلف نسبة مهمة من عنصر الكلفة للوحدة الواحدة من المنتوج.
   - مساحات الاراضي ذات المواصفات النادرة كما هي الحال مع مساحات الاراضي التي يتواجد فيها النفط او مناجم الفحم والذهب وما شابه ذلك.
2. تعدد **البدائل:** يقصد بذلك وجود أكثر من بديل او طريقة لاستغلال الموارد المتاحة والمحدودة، فمثلا في العملية الانتاجية لإنتاج الالبسة الرجالية فاذا كان المقصود بالموارد المتاحة المحدودة هي الاقمشة الرجالية الداخلة في انتاج البدلات والسراويل فان المقصود بالبدائل هنا وجود أكثر من طريقة لقص القماش من اجل الحصول على ما هو مطلوب من منتجات بأقل كلفة ممكنة.

VII. المجالات التطبيقية لبحوث العمليات:

يطبق اسلوب بحوث العمليات في جميع مناحي الحيات وخاصة في النواحي الإقتصادية والصناعية والزراعية والتجارية ومن أهمها:

1. **المجال الصناعي:** في هذا المجال يكون المسيرين امام أحد المعضلتان الاساسيتان وهما إما تعظيم الأرباح أو تقليل التكاليف ولحل هاتان المشكلتان نستخدم الأساليب الكمية في الحل ويتم تطبيق بحوث العمليات أيضا في تحديد كمية الإنتاج وزيادة الطاقة الإنتاجية والسيطرة على المحزون.
2. **المجال العسكري:** تستخدم العسكريون بحوث العمليات في تحدد أفضل الطرق للنقل بأقل الخسائر الممكنة وأيضا وضع التكتيك الدفاعي الذي يعتمد على أسلوب البرمجة الخطية.

3. **المجال الزراعي:** يعتمد اسلوب بحوث العمليات في اشكالية التوزيع الأمثل للمياه على الأراضي الزراعية والاستخدام الامثل للموارد المائية والانتاج والتوزيع على السكان والزراعة والصناعة.

4. **المجال الخدماتي:** تستخدم بحوث العمليات في النواحي الخدمية مثل المستشفيات ووسائل النقل وبعض الدوائر الحكومية في صفوف الانتظار، وأيضا في تنظيم وصول القطارات والطائرات.

3. **المجال** التسويقي**:** تستخدم بحوث العمليات في التسويق بحيث نستطيع التنبؤ بالطلب عند مستويات المحزون المتدنية واختيار المنتج الذي يحقق أعلى عائد وفي تحديد الأساليب التسويقية للمنتجات.

4. **المجال المالي:** تطبق بحوث العمليات البنوك ولدى رجال المال والاعمال في نواحي عديدة منها التخطيط لزيادة أرباح المنظمة والتخطيط للمشروع وزيادة رأس المال بالإضافة إلى تحليل التدفق النقدي.

TISSEMSILT UNIVERSITY

المحور الاول

طريقة البرمجة الخطية

يعتبر أسلوب البرمجة الخطية أحد اساليب بحوث العمليات كونها اسلوب رياضي يستعمل لإيجاد أفضل الاستعمالات للموارد المتاحة المحدودة لدي المنظمة، بمعنى اخر أفضل توزيع لتلك الموارد على البدائل المتاحة. هذا الاسلوب له جانبان، الاول البرمجة وتعني امكانية استعمال الاسلوب لإيجاد البرامج المختلفة للتوصل الى الاستعمال الامثل للموارد المحدودة والمتاحة لدى المنظمة أي اختيار أفضل هذه البرامج التي تحقق هدف المشكلة. والجانب الثاني هو الخطية والمقصود بها ان العلاقات بين متغيرات النموذج يكون بشكل علاقات خطية. والبرمجة الخطية هي أداة بيانية ورياضية تهتم ببناء النماذج الرياضية لمشكلة من المشاكل بإحدى الطرق منها: الطريقة البيانية، الطريقة المبسطة، طريقة النقل، طريقة التخصيص....الخ.

I. مفهوم البرمجة الخطية:

يستخدم أسلوب البرمجة الخطية في حل مشاكل التوزيع الأمثل للموارد المحدودة على الاستخدامات المختلفة، ويعد هذا الأسلوب الرياض ي من أكثر الأساليب الكمية انتشارا سواء في الدراسات الأكاديمية أو الممارسات العملية. وقد ثبت استخدامه في معالجة غالبية المشاكل التي تتعرض لها إدارة الإنتاج والعمليات.

وقد شاع استخدام هذا الأسلوب في عام 1947 بواسطة العالم الرياضي الأمريكي جورج دانتزج الذي أدخل الأسلوب المبسط (السمبلكس) في حل مشاكل البرمجة وعلى الرغم من التعقيد الذي يتصف به إثبات واشتقاق أسلوب السمبلكس إلا أن خطوات الحل مسلسلة ومحددة خصوصا في حالة المشاكل الصغيرة. وقد ساعد التقدم التكنولوجي في العصر الحديث على نمو إستخدام هذا الأسلوب في مجالات وتطبيقات عديدة، كان يصعب حلها يدويا.

تعتبر البرمجة الخطية أحد الفروع التطبيقية والرئيسية لبحوث العمليات التي تساعدنا على استخدامها في حـالات اختيار الحل الأمثل، والأفضل من مجموعة كبيرة من الحلول الممكنة لمشكلة معينة ويمكن تعريفها:

البرمجة الخطية أسلوب رياضي لتوزيع مجموعة من الموارد والإمكانيات المحددة على عدد معين من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثنائية، بحيث يحقق هذا التوزيع أفضل نتيجة ممكنة أي يكون التوزيع أمثل.

البرمجة الخطية أسلوب رياضي لتعظيم أو تخفيض أحد المتغيرات التابعة التي تعتبر دالة لعدد من المتغيرات المستقلة، عندما تكون هذه الأخيرة خاضعة لعدة قيود.

ويشير لفظ الخطية إلى وجود علاقات خطية بين المتغيرات، هذه العلاقة مباشرة ونسبية بمعنى إذا كانت هناك علاقـــة خطية بين ساعات العمل وكمية المخرجات فهذا يعني أنه إذا حدث تغير بنسبة 01%في قيمة الساعات المخصصة للإنتاج، فهذا يؤدي إلى تغير بنسبة 01% في قيمة المنتجات المخرجة.

ويشير لفظ البرمجة إلى أن هذا الأسلوب اعتمادا على العلاقات الخطية، يمكن من وضع برنامج عمل يحدد أنواع الأنشـطة اللازم القيام بها، وتوقيتها وكمياتها، بأسلوب يتميز بفكرة الحلول المتتابعة INTERATIONبمعنى أن هذا الأسلوب

ومما تجدر الإشارة إليه هو أن الغاية من تطبيق أسلوب البرمجة الخطية هي الوصول إلى حل نموذج البرمجة الخطية (ونموذج البرمجة الخطية هو عبارة عن مجموعة من المعادلات والمتباينات بالإضافة إلى دالة الهدف)، ولا تنسى أن لكل مجموعة من المعادلات حلا، وعادة ما تكون للمعادلات الآتية حلول أي إيجاد

قيم المتغيرات، وفي حالة حل نموذج البرمجة الخطية دائما تسعى إلى إيجاد الحل الأمثل وتكون الحلول على ثلاث أنواع:

- الحل :وهر حل ممكن الوصول إليه في أية مجموعة من المعادلات.
- الحل الممكن :وهو الحل الذي يمكن إيجاده بعد التوصل إلى الحل في الحالة الأولى وهذا الحل يحقق القيود كافة بشكل عام.
- الحل الأمثل: وهو الحل الذي يمكن إيجاده بعد التوصل إلى الحل الممكن، وهذا الحل يحقق القيود كافة بوجود دالة الهدف. وبهذا الصدد يجب التأكد من أن الحل الممكن لا يتحقق بعد وجود الحل، ولا يمكن تحقيق الحل الأمثل إلا بعد أن يتحقق الحل الممكن.

II. متطلبات استخدام البرمجة الخطية:

تتطلب مشكلة البرمجة الخطية خمس خصائص أساسية هي:

- تحديد الهدف :أي ما نسعى لتحقيقه وهو إما زيادة الأرباح أو تقليل الكلفة، معبر عنه بصيغة رياضية يطلق عليها دالة الهدف وتصاغ دالة الهدف بالشكل التالي:

حالة تعظيم: $MaxZ = 2X + 3Y$

حالة تدنئة: $MinZ = 2X + 3Y$

- توفير عدد من البدائل :تستخدم البرمجة الطية عندما تكون لدينا بدائل لحل المشكلة فإذا كان هناك بديل واحد لحل المشكلة إذاً لا داعي لاستخدام البرمجة الخطية؛
- محدودية الموارد :نحتاج لاستخدام البرمجة الخطية عندما تكون الموارد محددة) نادرة (كالموارد البشرية، أو المواد، أو ساعات اشتغال الآلات. وهي بمثابة شروط لتحقيق الهدف، فإذا كان لدينا 300ساعة في القسم الأول وكنا نحتاج لساعتين لإنتاج المنتوج الأول وثلاثة ساعات لإنتاج المنتوج الثاني، فيعبر عن المشكلة كالآتي: $2X1 + 3X2 \leq 300$
- وجود علاقة خطية :الخطية في البرمجة يجب أن تتوفر في دالة الهدف وفي القيود (الموارد)، بحيث أن أي تغير في كميات الإنتاج يؤدي إلى زيادة الأرباح أو تقليل التكليف بشكل خطي (طردي) مع زيادة كمية الإنتاج، وكذلك الموارد تستنفذ بشكل خطي مع زيادة كمية الإنتاج؛
- القيود غير السالبة :إن هذا الشرط يلبي إحدى فرضيات البرمجة الخطية وهو شرط عدم السلبية. ولذلك لا يمكن أن يكون أحد القيود ينتج متغيرات سالبة كما يلي: $2X_1 + 3X_2 \leq 300$

III. فروض نموذج البرمجة الخطية:

تمثل الافتراضات، الشروط العلمية الواجب توفرها في المشكلة حتى نستطيع حلها بواسطة البرمجة الخطية، أو هي المتطلبات الفنية لمشكلة البرمجة الخطية وهي:

- يفترض النموذج إمكانية النسبة والتناسب في كل مكوناته) دالة الهدف والقيود الفنية(؛
- تحقيق خاصية الجمع التي تعني أن القيمة الكلية لأي مؤشر ما هي إلا حاصل جمع قيمه ائية؛
- يعالج نموذج البرمجة الخطية الحالات المتصفة بالتأكد التام، وهذا يعني أن القيم التي تأخذها مؤشرات النموذج هي كلها قيم محددة ومعروفة ولا يطرأ عليها تغيير خلال فترة الدراسة.

وهناك فروض أخرى منها ما يلي":

- **الخطية:** يشترط ان تكون العلاقة في دالة الهدف والقيود علاقة خطية؛
- **المحدودية:** محدودية الموارد والأنشطة، أي أن هناك ندرة فيها وأنه لا يوجد عدد نهائي من الأنشطة البديلة والموارد المتاحة؛

- **عدم السلبية :عدم** إمكانية أن يكون حجم النشاط سالبا؛
- **الاستقلالية :أن** اختيار أي نشاط لا يستلزم بالضرورة اختيار نشاط آخر، أي استقلالية عناصر الإنتاج؛

IV. مجالات استخدام البرمجة الخطية:

يستخدم اسلوب البرمجة الخطية في المجالات الإقتصادية (التسويقية المالية إدارة الإنتاج ...الخ) بهدف إيجاد أمثلية الاستخدام للمواد المتاحة في ظل وجود مجموعة من القيود المالية أو التقنية أو كلاهما معا. سواء كان ذلك في حالة التعظيم او في حالة التدنئة. ومن امثلة هذه المجالات نجد:

1. **في حالة التعظيم:**
   - تعظيم الأرباح؛
   - تعظيم الإنتاج؛
   - تعظيم طاقات التخزين؛
   - تعظيم إستخدام رؤوس الأموال؛
   - تعظيم إستخدام اليد العاملة.
2. **في حالة التدنئة:**
   - تدنئة التكاليف؛
   - تدنئة الخسائر؟
   - تدنئة عدد الموظفين؛
   - تدنئة الأجور الإجمالية.

V. صياغة أو بناء نموذج البرمجة الخطية:

تقتضي عملية حل مشكلة من المشاكل التي تعترض أي منضمة في عملها صياغة نموذج رياضي يمثل المشكلة وبهذا فإنه يجب فهم المشكلة فهما دقيقاً وهي الخطوة الأولى لحلها، ولصياغة نموذج البرمجة الخطية يجب ان نمر على الخطوات التالية:

- الفهم الكامل والدقيق للمشكلة التي تواجهنا؛
- تشخيص دالة الهدف والقيود المحددة؛
- تحديد المتغيرات في المشكلة؛
- استخدام متغيرات المشكلة في الكتابة الرياضية لكل من دالة الهدف والقيود.

VI. صياغة نموذج البرمجة الخطية:

من اجل صياغة نموذج البرمجة الخطية يجب توفر ثلاث شروط الأساسية وهي:

الشرط الاول: تحديد الهدف بصورة كمية كأن يكون الهدف تحقيق أكبر ما يمكن من الربح أو تأمين اصغر ما يمكن من الكلفة.

الشرط الثاني: تحديد القيود الهيكلية أي يجب أن تكون الموارد المتاحة محددة وقابلة للقياس ومعبرا عنها بصيغة رياضية على شكل متراجحات أو معادلات، أو خليط منها

شرط الثالث: عدم السلبية يجب أن تكون المتغيرات في المشكلة قيد الدراسة متغيرات موجبة أو صفرية.

ولدينا ثلاثة انواع من الحلول لنموذج البرمجة الخطية هي:

- **الحل:** وهو الذي يمكن ان يحقق أي مجموعة من المعادلات او المتباينات الممثلة للقيود.
- **الحل الممكن:** وهو الحل الذي يحقق جميع قيود نموذج البرمجة الخطية.

- **الحل الامثل:** ويمثل احد الحلول الممكنة والذي يحقق القيمة المثلى لدالة الهدف، أي انه الحل الذي يحقق جميع القيود ودالة الهدف في آن واحد.

2- الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية:

يتألف نموذج البرمجة الخطية من جزئين هما دالة الهدف والقيود، والصيغة العامة للنموذج الرياضي تكون وفق الصيغة الاتية:

دالة الهدف
$$\text{Max. (or Min.) } Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots\ldots + C_n X_n$$

القيود الهيكلية
$$\text{S. T} \quad \begin{cases} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots\ldots + a_{1n} X_n \ \geq \text{or} \leq \text{or} = b_1 \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \ldots\ldots + a_{2n} X_n \ \geq \text{or} \leq \text{or} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} X_1 + am_2 X_2 + \ldots\ldots + a_{mn} X_n \ \geq \text{or} \leq \text{or} = b_m \end{cases}$$

قيد عدم السلبية
$$X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n \ \geq \ 0$$

نلاحظ دالة الهدف هي معادلة خطية تأخذ اما صيغة التعظيم (إذا كان الهدف هو تحقيق أعظم ربحية) او تأخذ صيغة التصغير (إذا كان الهدف هو تحقيق اقل كلفة). اما القيود فأما تكون بهيئة متباينات أكبر من او اقل من او بهيئة متساويات. اما القيود الاخيرة فدائما يكون بهيئة متباينة أكبر من او تساوي الصفر وتسمى قيود عدم السلبية وذلك لأن متغيرات الأساس هي ذات قيم غير سالبة.

مع ملاحظة انه على الاغلب القيود المرافقة لدالة الهدف التي بهيئة التعظيم تكون بهيئة متباينات اكبر او يساوي او معادلات اما تلك المرافقة لدالة الهدف التي بهيئة تصغير تكون بهيئة متباينات اصغر او تساوي او معادلات.

تعريف متغيرات النموذج الرياضي:

Z: قيمة الهدف الاجمالية وهي تمثل الربح الاجمالي المطلوب تحقيقه وفي هذه الحالة تأخذ دالة الهدف صيغة التعظيم (Max.) لأننا نسعى لتحقيق اكبر ربح ممكن من حل المشكلة. وقد تمثل الكلفة الاجمالية وفي هذه الحالة تأخذ دالة الهدف صيغة التصغير (Min) لأننا نسعى لتحقيق أقل كلفة ممكنة من حل المشكلة.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$: متغيرات الأساس (المتغيرات المطلوب تحديد قيمها) وتسمى بمتغيرات الأساس لأن على اساس قيمها (التي تمثل حل المشكلة) يتم اتخاذ القرار بخصوص المشكلة هذه المتغيرات قد تمثل عدد الوحدات المنتجة من منتوج معين في حالة مشكلة الانتاج، او عدد الشاحنات من نوع معين في حالة مشكلة النقل، بمعنى تتحدد حسب نوع المشكلة المراد حلها.

هذه المتغيرات يمكن التعبير عنها بمتجه صفي $X = (X_1\ X_2\ \ldots\ X_n)$ ذو سعة (1xn).

$C_1, C_2, \ldots, C_n$: معاملات متغيرات دالة الهدف والتي تمثل ربح الناتج من انتاج الوحدة الواحدة من منتج ما أو كلفة الوحدة الواحدة من منتج ما، أي حسب طبيعة دالة الهدف. هذه المعاملات يمكن التعبير عنها بمتجه صفي $C = (C_1\ C_2\ \ldots\ C_n)$ ذو سعة (1 x n).

المصفوفة $[a_{ij}]$: $(i = 1, 2, \dots, n)$ و$(j = 1, 2, \dots, m)$ اي ان المصفوفة ذات سعة (mxn) وتمثل مصفوفة معاملات المتغيرات للقيود الهيكلية حيث يمثل كل صف معاملات المتغيرات القيد المناظر لذلك الصف. المصفوفة تكتب كالاتي :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$b_1 , b_2 , \dots , b_m$: تمثل الحد الثابت للقيود وتمثل الكمية المتاح من الموارد المتوفرة مثلا عدد ساعات عمل ماكنة (الطاقة التشغيلية للماكنة)، او الطاقة الاستيعابية لكل شاحنة. ويمكن تمثيلها بمتجه عمودي: $b=(b_1\ \ b_2\ \ \dots\ \ b_m)T$ ذو سعة $(mx1)$.

النموذج الرياضي يمكن كتابة بصيغة المصفوفات وكالآتي:

$$\text{Max. (or Min.) } Z = C\,X^T$$

$$S.T \left| \begin{array}{l} A\,X^T \geq \text{or} \leq \text{or} = b \\ \mathbf{X \geq 0} \end{array} \right.$$

مثال رقم (01):

تنتج إحدى المؤسسات الصناعية نوعين السلع، A وB وتصنع كل سلعة على ثلاثة مراحل كل مرحلة في احد الأقسام الثلاثة الموجودة في المؤسسة، فإذا كان تصنيع السلعة A يحتاج إلى ساعتين عمل في القسم الأول وساعة عمل في القسم الثاني وأربع ساعات عمل في القسم الثالث ويحتاج تصنيع السلعة B إلى ساعتين عمل في كل قسم كما أن عدد ساعات العمل المتاحة في القسم الأول هي 150 ساعة عمل أسبوعيا وفي القسم الثاني 110 ساعة عمل أسبوعيا وفي القسم الثالث 270 ساعة عمل أسبوعيا وإذا كان ربح الوحدة الواحدة من السلعة A هو 3 دينار ومن السلعة B هو 4 دينار

المطلوب: بناء نموذج برمجة الخطية المناسب لتحديد حجم الإنتاج الأمثل من السلعتين إذا كان هدف الشركة هو الحصول على أكبر ربح ممكن.

الحل: جدولة المعطيات

الربح	الوقت اللازم للتصنيع			السلعة
	القسم الثالث	القسم الثاني	القسم الأول	
3	5	2	3	A
4	3	3	3	B
	270	110	150	ساعات العمل المتاحة

- تحديد المتغيرات المجهولة والتعبير عنها برموز جبرية، ولذلك:
  - انفرض عدد الوحدات المنتجة من السلعة A هو X_1
  - انفرض عدد الوحدات المنتجة من السلعة B هو X_2
- تحديد القيود والتعبير عنها بمعادلات أو متراجحات أو خليط منها

والقيود هنا هي أن الوقت اللازم للتصنيع في كل قسم محدود ويجب أن نتجنب تجاوز هذا الحد، لاحظ أن الوقت اللازم للتصنيع يتوقف على الكمية المنتجة. من السلعة A والسلعة B

بالنسبة للقسم الأول: الوقت اللازم للتصنيع (المتاح) = (عدد الوحدات المنتجة من السلعة x(A .(الوقت اللازم لتصنيع الوحدة الواحدة من السلعةA) +(عدد الوحدات المنتجة من السلعةB) x(الوقت اللازم لتصنيع الوحدة الواحدة من السلعة B) ويجب أن لا يتجاوز عدد الساعات العمل، المتاحة في القسم الأول وكما في المتراجحة الآتية: $3X_1 + 3X_2 \leq 150$

وبنفس الطريقة بالنسبة للقسمين الثاني والثالث أيضا وكما في المتراجحات الآتية:

بالنسبة للقسم الثاني: $2X_1 + 3X_2 \leq 110$

بالنسبة للقسم الثالث: $5X_1 + 3X_2 \leq 270$

وشرط عدم السلبية يتحقق في: $X_1; X_2 \geq 0$

ويكون البرنامج الخطي على النحو التالي

	$Max(Z) = 3X_1 + 4X_2$	دالة الهدف.تعظيم
S/C	$3X_1 + 3X_2 \leq 150$	القسم الأول
	$2X_1 + 3X_2 \leq 110$	القسم الثاني
	$5X_1 + 3X_2 \leq 270$	القسم الثالث
	$X_1; X_2 \geq 0$	شرط عدم السلبية

أما الشكل المصفوفي يكتب كما يلي:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Min}(Z) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \\ \text{S/C} \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 150 \\ 110 \\ 270 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \end{array}\right\}$$

المحور الثاني

الطريقة البيانية في البرمجة الخطية

تعتبر طريقة الرسم البياني طريقة سهلة وبسيطة وواضحة في معالجة مشاكل البرمجة الخطية خاصة تلك المشاكل التي لا يزيد فيها عدد المتغيرات عن اثنين والتي تحتوي على عدد بسيط من القيود كما تفيد طريقة الرسم البياني كمقدمة لدراسة طرق وأساليب أخرى أكثر تعقيدا في حل مشاكل البرمجة الخطية مثل السمبلكس

I. المراحل الأساسية لأسلوب الرسم البياني

عند إتباع أسلوب الرسم البياني يجب إتباع الخطوات التالية:

- .رسم المحور السيني والصادي(الجزء الموجب من كل منهما)
- تحديد نقطتين لكل مستقيم (معادلة)
- رسم المستقيمات المعبرة عن المعادلات
- تحديد منطقة الامكانيات المتاحة
- تعيين النقطة ضمن منطقة الامكانيات المتاحة التي تعطي أفضل النتائج (أعلى عائد أو أقل تكلفة) وعادة تكون نقطة تقاطع مستقيمات وتكون في حالة تعظيم الأرباح أبعد ما يكون عن نقطة الأصل وتكون في حالة تقليل التكاليف أقرب ما يكون من نقطة الأصل

II. مثال توضيحي للمراحل الأساسية لأسلوب الرسم البياني

تقوم أحد المؤسسات بتصنيع منتوجين X_1 وX_2، حيث يبلغ ثمن الوحدة الواحدة من X_1 في السوق 10، ويحتاج إلى ساعة عمل واحدة في القسم1، وساعة عمل واحدة في القسم2، بينما ثمن الوحدة الواحدة من X_2 في السوق 40، وتحتاج إلى ساعتين عمل في القسم1، وخمسة ساعات عمل في القسم2، وفي اللحظة التي يستوعب فيها السوق جميع المنتجات من كلا المنتجين، لا يستطيع مسير المؤسسة الحصول شهريا على أكثر من 100 ساعة عمل في القسم1، كما لا يستطيع الحصول على أكثر من 150 ساعة عمل في القسم2.

وفي هذه الحالة يحتاج مسير المؤسسة إلى أن يحدد مزيج الإنتاج من X_1 وX_2 الذي يحقق لمؤسسته أعلى عائد

1. حل المثال بطريقة الرسم البياني

يتطلب الحل البياني ما يلي:

- ➢ تكوين المعلم المتعامد والمتجانس $(X_1\text{-}X_2)$
- ➢ رسم مستقيمات القيود كما يلي:
  - ▪ تحويل القيود الى متساويات وذلك كما يلي:
    - ✓ المستقيم الأول $X_1+2X_2=100$
    - ✓ المستقيم الثاني $X_1+5X_2=150$
  - ▪ تحديد نقطتين لكل مستقيم حتى يمكن رسمه وذلك بمعرفة قيم الاحداثين كما يلي:

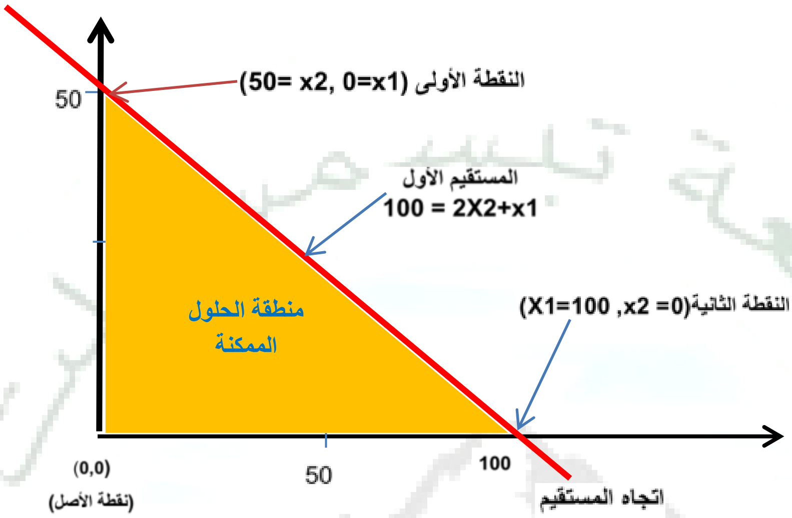
	X_1	X_2
المستقيم الأول	0	50
	100	0

وتوضيحا لما تعنيه هذه الأرقام، افترض ما يلي:

بافتراض أن المنتج ركز على إنتاج (X_2)، وأهمل (X_1)، فإنه يستطيع إنتاج 50 وحدة من (X_2) من ساعات الآلة المتوفرة لديه (بفرض أن القيد الأول يعبر عن ساعات العمل لآلة).

بينما إذا ركز الإنتاج على (X_1) مهملا (X_2) فإنه يستطيع إنتاج 100 وحدة من (X_1) من ساعات الآلة المتوفرة.

يمكن الآن رسم المعلم المتعامد والمتجانس وتحديد المستقيم الأول عليه كما يلي:



- تحديد اتجاه المستقيم الذي يحققه:

نختبر المستقيم مع نقطة الأصل أي نعوض $X_1=$ صفر، $X_2=$ صفر

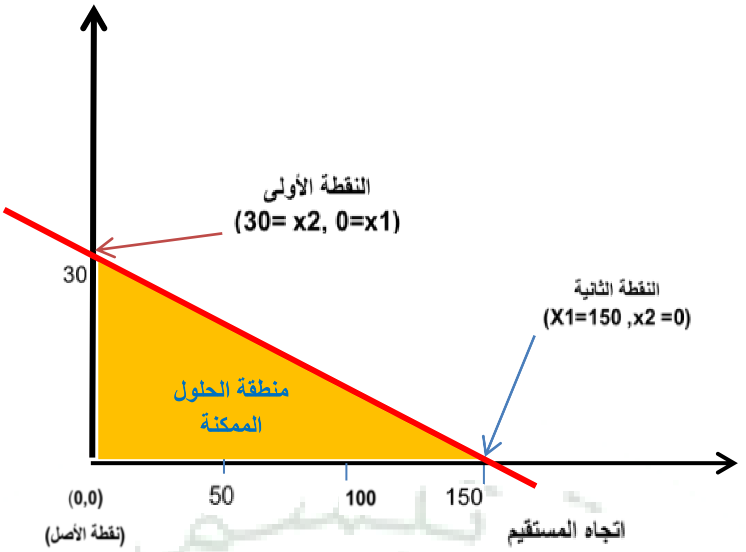
إذن اتجاه المستقيم هو نحو نقطة الأصل، وهذا يعني ببساطة أن أي نقطة على المستقيم أو بينه وبين نقطة الأصل تحققه.

والمنطقة بين المستقيم ونقطة الأصل تسمى منطقة الإمكانيات المتاحة وفق هذا القيد بمعنى أن المنتج يستطيع إنتاج أي كمية ضمن المساحة المظللة ووفق القيد الأول.

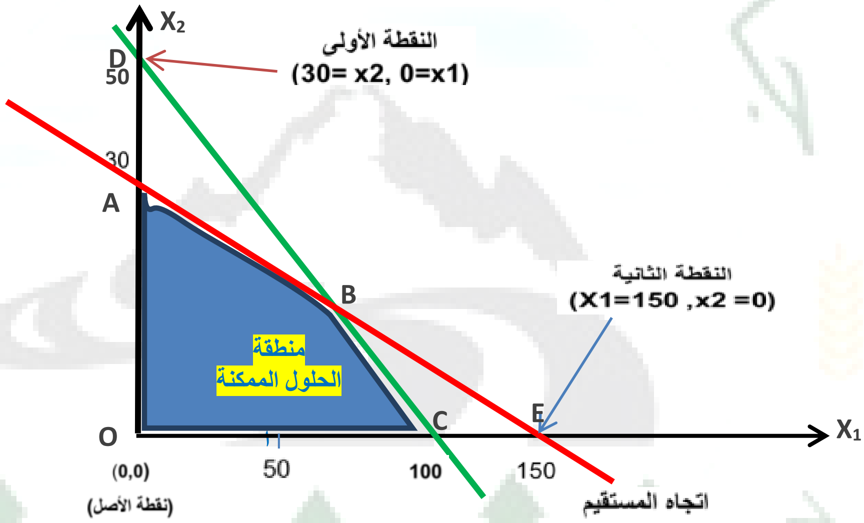
	X_1	X_2
المستقيم الثاني	0	30
	150	0

وتوضيحا لما تعنيه هذه الأرقام:
بافتراض أن المنتج ركز على إنتاج (X_2) فقط، وأهمل إنتاج (X_1)، فإنه يستطيع إنتاج 30 وحدة من (X_2) من ساعات العمل المتوفرة لديه (بفرض أن هذا القيد يمثل ساعات عمل).

بينما إذا ركز الإنتاج على (X_1) مهملا (X_2) فإنه يستطيع إنتاج 150وحدة من (X_1) من ساعات العمل المتوفرة لديه.
يمكن الآن رسم المعلم المتعامد والمتجانس وتحديد المستقيم الثاني عليه كما يلي:



ويمكن الآن رسم المعلم المتعامد والمتجانس وتحديد المستقيمين الأول والثاني عليه كما يلي:



2. تحديد منطقة الإمكانيات المتاحة

نقوم بداية بتحديد منطقة الإمكانيات المتاحة والتي تحقق كلا المستقيمين، وهي في هذه الحالة المنطقة المظللة **(OABC)**، حيث يستطيع المنتج إنتاج أي كمية داخل هذه المنطقة وفق القيدين وهما: الوقت المتاح من العمل والوقت المتاح من الآلة.

والهدف من حل هذه المشكلة هو تحقيق أعلى عائد ممكن، وبإجراء التجارب وجد أن أعلى عائد يتحقق عند نقاط تقاطع المستقيمات، لذلك يتم اختبار دالة الهدف عند هذه النقاط، وهي **(OABC)**.

ملاحظات:

أولا: منطقة الإمكانيات المتاحة هي **(OABC)** والتي تحقق كلا المستقيمين.

ثانيا: خروج منطقة **(BCE)** من منطقة الإمكانيات المتاحة لأنها تحقق المستقيم الثاني فقط ، ولا تحقق المستقيم الأول.

ثالثا: خروج منطقة **(ABD)** من منطقة الإمكانيات المتاحة لأنها تحقق المستقيم الأول فقط، ولا تحقق المستقيم الثاني.

3. تحديد النقطة التي عندها يكون الربح أعلى ما يكون:

تحديد النقطة التي عندها يكون الربح أعلى ما يكون، وذلك بإحدى الطريقتين:

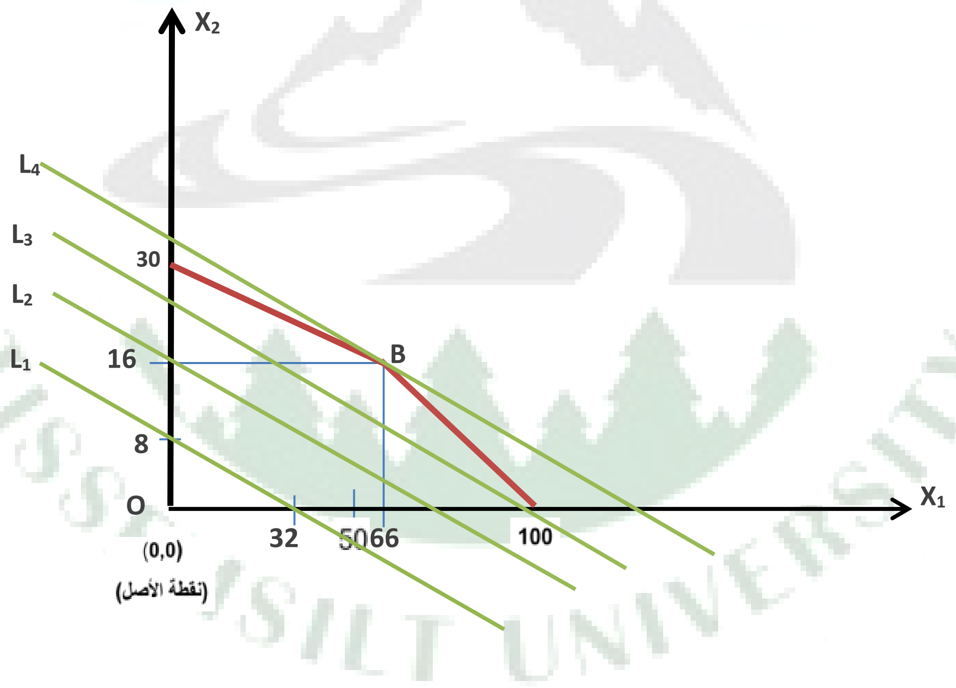
الطريقة الأولى: تقييم نقاط تقاطع المستقيمات وهي كما يلي:

النقطة	X_1	X_2	$Z=10X_1+40X_2$	النتيجة
O	0	0	10(0)+40(0)	0
C	100	0	10(100)+40(0)	1000
B	66	16	10(66)+40(16)	1300
A	0	30	10(0)+40(30)	1200

الطريقة الثانية: رسم مستقيم دالة الهدف، وذلك كما يلي:

دالة الهدف: $Z=10X_1+40X_2$

بافتراض أن $Z=320$ نوجد نقطتين لرسم مستقيم دالة الهدف وهي (8,0)، (0,32) ثم نقوم برسم هذا المستقيم كما يلي:



نلاحظ أن المستقيم L_1 عند قيمة $Z=320$ يقع ضمن الإمكانيات المتاحة نقوم بافتراض قيم أعلى فينتج لدينا المستقيم L_2 وL_3 وأخيرا مستقيم L_4 الذي يقع على حافة منطقة الإمكانيات المتاحة، وهذا يعني أن أعلى ربح هو عند هذا المستقيم $Z=1335$

ويجب ملاحظة أن جميع مستقيمات دالة الهدف متوازية بغض النظر عن اختلاف قيم Z، وذلك لأن ميل المستقيمات ثابت لا يتغير، والذي يغير ميل المستقيم هي معاملات X_1, X_2 وليس قيمة Z.

ملاحظات على نتيجة الحل:

- نلاحظ أن أعلى عائد قد تحقق عند النقطة B، أي يجب إنتاج 66.7 من X_1، و16.7 من X_2 لتحقيق عائد قدره 1335 ونتيجة أنه لا يمكننا إنتاج كسور من X_1 أو X_2 (اذا كان المتغيران يتبعان توزيعا منفصلا) ويتم تقريبها للقيمة الأدنى حتى تكون ضمن منطقة الإمكانيات المتاحة .
- كما يمكن تحديد مدى استغلال الموارد عند النقطة B (66.666)، (16.666) :

القيود	الطاقة المتاحة	معادلة دالة الهدف	المستغل	الفائض
X_1+2X_2	100	2 *16.666+ 1 *66.666	99.996	لا شيء تقريبا
X_1+5X_2	150	5 *16.666+ 1 * 66.666	149.996	لا شيء تقريبا

III. حالات خاصة في الحل البياني

أن مشكلات البرمجة الخطية بصورة عامة يمكن تطبيقها في مجالات واسعة وبنجاح، إلا أن هناك حالات خاصة يجب مراعاتها، ومن هذه الحالات نجد:

1. تعدد الحلول المثلى:

ونحصل على هذا النوع من الحلول عندما تكون هناك أكثر من نقطة واحدة في منطقة الحلول الممكنة تعطي القيمة نفسها لدالة الهدف التي تكون أعلى القيم في حالة كون دالة الهدف من نوع التعظيم أو تكون أقل القيم حين تكون دالة الهدف من نوع تدنئة.

مثال توضيحي لحالات تعدد الحلول المثلى :

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

$$\mathrm{Max}(Z) = X_1 + 2X_2$$

$$S/C \left| \begin{array}{l} X_1 + 2X_2 \leq 10 \\ X_1 + X_2 \geq 1 \\ X_2 \leq 4 \\ X_1; X_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

- نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتراجحات إلى معدلات كما يلي:

$$X_1 + 2X_2 = 10$$
$$X_1 + X_2 = 1$$
$$X_2 = 4$$

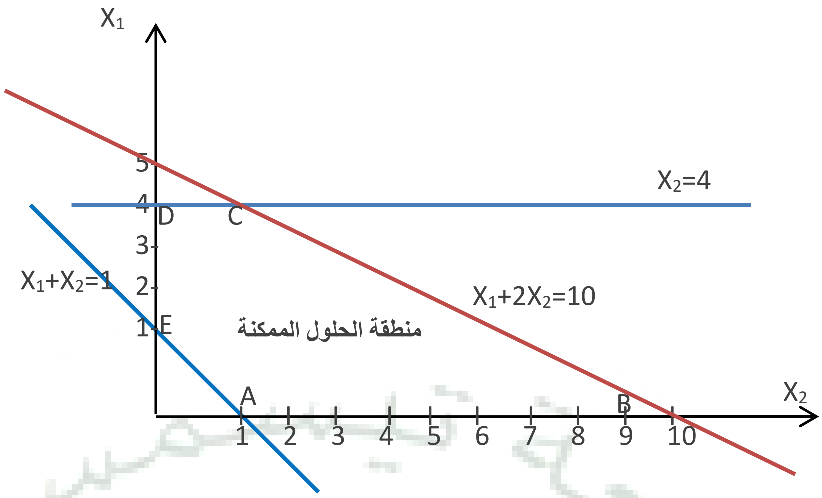
- على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينها.

$X_2 = 4$ هو خط مستقيم موازي للمحور الأفقي

$X_1 + X_2 = 1$	
X_1	X_2
0	1
1	0

$X_1 + 2X_2 = 10$	
X_1	X_2
0	5
10	0

نلاحظ أن منطقة الحل قد الممكن تحددت بالنقاط (ABCDE)، حيث إحداثيات النقطة A



هي:$(0;1)$ والنقطة B هي:$(10;0)$ أما النقطة D هي:$(0;4)$ و E هي:$(0;1)$

أما النقطة c مولد من تقاطع مستقيم القيد الأول والثاني:

$$X_1 + 2X_2 = 10$$
$$X_1 + X_2 = 1$$

وبعد القيام بالحل الجبري لهما، سنجد أن:$C: (X_1 = 2 \; ; \; X_2 = 4)$

وبتعويض قيم إحداثيات الزوايا الخمس في دالة الهدف، نتوصل إلى الحل الأمثل والذي يحقق لنا أكبر عائد كما يظهر في الجدول التالي:

نقاط	أحداثيات نقاط	قيمة دالة الهدف
A	$A: (X_1 = 1 \; ; \; X_2 = 0)$	$Z_A = 1$
B	$B: (X_1 = 10 \; ; \; X_2 = 0)$	$Z_B = 10$
C	$C: (X_1 = 2 \; ; \; X_2 = 4)$	$Z_C = 10$
D	$D: (X_1 = 0 \; ; \; X_2 = 4)$	$Z_D = 8$
E	$E: (X_1 = 0 \; ; \; X_2 = 1)$	$Z_E = 2$

من الجدول نجد أن النقطتين B و C تحقق لدالة الهدف قيمة عظمى مساوية إلى 10 يتضح من ذلك أن للمشكلة أكثر من حل واحد ويعود السبب في ذلك هو أن دالة الهدف تكون موازية لأحد القيود الهيكلية، أي عند رسم دالة الهدف وتحريك الرسم ينطبق الرسم في إحدى أوضاعه على أحد المستقيمات المرسومة وهنا يقال إن للمشكلة مجموعة من الحلول المثلى (تعدد الحلول المثلى).

2. **عدم وجود حلول:**

هنا يحصل هذا النوع من الحلول عندما لا يمكن تعيين منطقة الحلول الممكنة ولا يوجد هنا حل أساسي ابتدائي مقبول، أي قيود لا تتقاطع في منطقة حل واحدة، بحيث تكون منطقة تقاطع القيود عبارة عن مجموعة خالية

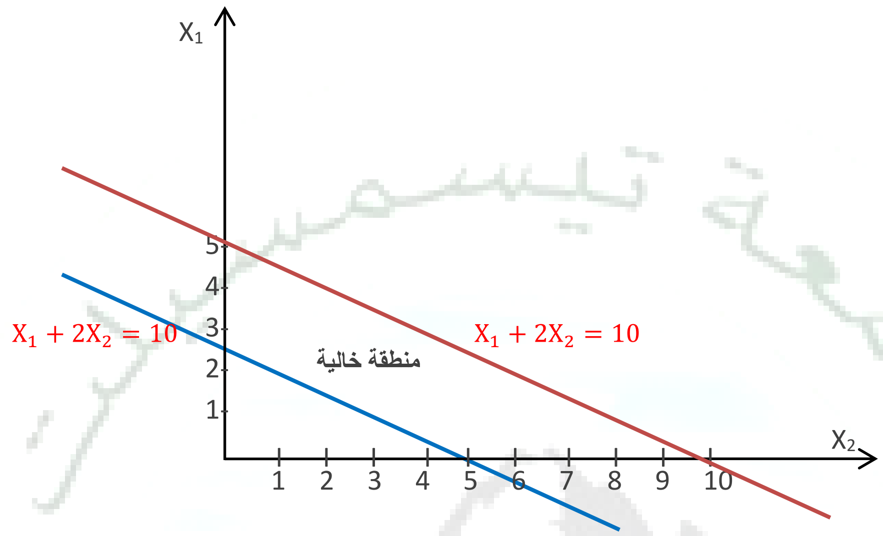
مثال توضيحي لحالات عدم وجود حلول:

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

$$\mathrm{Min}(Z) = 4X_1 + 3X_2$$
$$S/C \left| \begin{array}{l} X_1 + 2X_2 = 5 \\ X_1 + 2X_2 = 10 \\ X_1; X_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

نقوم بإيجاد احداثيات المستقيمين من القيدين اعلاه ثم رسم هذين المستقيمين على معلم متعامد ومتجانس فنجد:

$X_1 + 2X_2 = 10$			$X_1 + 2X_2 = 5$	
X_1	X_2		X_1	X_2
0	5		0	5/2
10	0		5	0



من خلال الشكل نلاحظ أن القيدين متعاكسان ولا يتقاطعان نهائياً ويعطيان مستقيمان متوازيان، وبذلك لا نستطيع الحصول على حل مقبول لهذه المشكلة.

3. منطقة الحلول الممكنة الغير محدودة:

ويعني ذلك عدم إمكانية تحديد نقطة حل أمثل وهذا يعني زيادة متغير أو أكثر من متغيرات المشكلة ومن ثم الربح دون مخالفة لأي قيد من القيود المشكلة وتعتبر هذه الحالة نظرية وبعيدة عن الواقع وبالنسبة لطريقة الرسم البياني فإن هذا يعني بأن منطقة الحل مفتوحة وبدون نهاية علماً بأن هذه الحالة تنطبق فقط على نموذج البرمجة الخطية الذي دالة الهدف له تعظيم.

ويمكن اعتبار هذه الحالة تقع أيضا عندما تكون المشكلة بدالة هدف تعظيم ويكون هناك تناقض بين دالة الهدف والقيود فتكون هذه الأخيرة أكبر أو تساوي وتعكس الشكل القانوني (القيود أقل أو تساوي).

مثال توضيحي لحالات منطقة الحلول الممكنة الغير محدودة:

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\mathrm{Max}(Z) = 6X_1 + 10X_2$$

$$S/C \left| \begin{array}{l} 4X_1 + 8X_2 \geq 40 \\ 8X_1 + 4X_2 \geq 40 \\ X_1; X_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

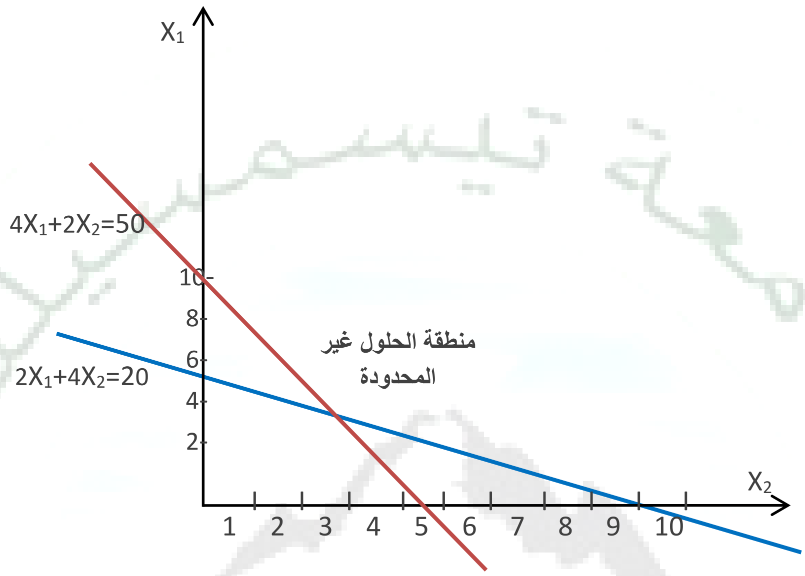
المطلوب: باستخدام طريقة الرسم البياني أوجد الحل الأمثل لهذا البرنامج

في الحل نقوم بإيجاد احداثيات المستقيمين من القيدين اعلاه ثم رسم هذين المستقيمين على معلم متعامد ومتجانس فنجد:

$4X_1 + 8X_2 \geq 40$	
X_1	X_2
0	5
10	0

$8X_1 + 4X_2 \geq 40$	
X_1	X_2
0	10
5	0

الرسم البياني الذي يوضح هذه المشكلة:



إن منطقة الحل الممكن مفتوحة من النهاية وهي غير محدودة فأية قيمة في المنطقة تحقق دالة الهدف وبالتالي نقول أن دالة الهدف لانهائية.

4. حالة حياد أحد القيود:

وهي من المشاكل الشائعة في مشاكل البرمجة الخطية الكبيرة التي تحتوي على عدد كبير من القيود، مما ينتج عنها قيد فائض لا حاجة له وليس له أي تأثير على الحل، وهذا يعني وجود قيود لها أهمية أكثر من غيرها، لذلك فإن استخدام الأهم يغني عن استخدام الأقل أهمية.

مثال توضيحي لحالة حياد أحد القيود:

افترض أن لديك نموذج البرمجة الخطية التالية:

$$\mathrm{Max}(Z) = 10X_1 + 10X_2$$

$$S/C \left| \begin{array}{l} 2X_1 + 2X_2 \leq 40 \\ 4X_1 + 4X_2 \geq 40 \\ X_1 \leq 22 \\ X_1 ; X_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

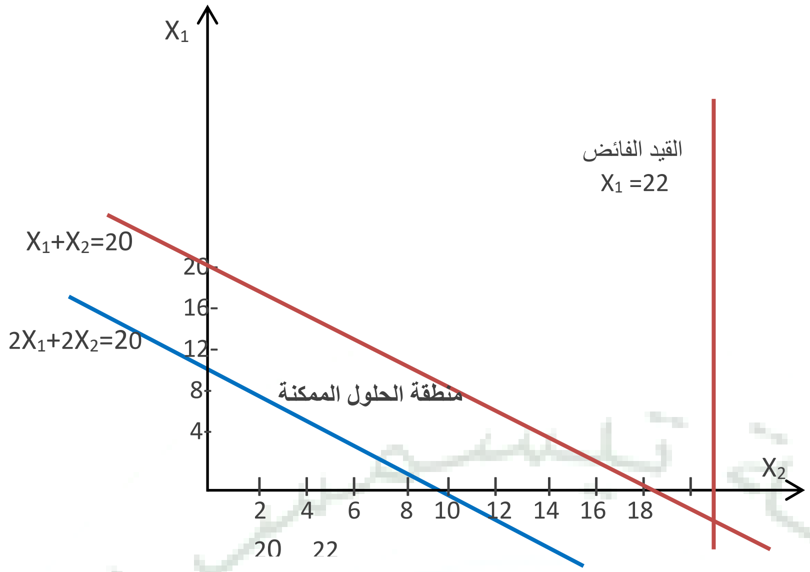
المطلوب: باستخدام طريقة الرسم البياني أوجد الحل الأمثل لهذا البرنامج

في الحل نقوم بإيجاد احداثيات المستقيمين من القيدين اعلاه ثم رسم هذين المستقيمين على معلم متعامد ومتجانس فنجد:

$2X_1 + 2X_2 \leq 40$	
X_1	X_2
0	20
20	0

$4X_1 + 4X_2 \geq 40$	
X_1	X_2
0	10
10	0

الرسم البياني الذي يوضح هذه المشكلة:



نلاحظ من خلال الشكل وجود حالة القيد الفائض متمثلة بالقيد الثالث أبطلا مفعول هذا القيد ذلك أنهما أكثر تقييداً وتحديداً و هما اللذان حددا منطقة الحل الممكن.

المحور الثالث
الطريقة الجبرية في البرمجة الخطية

إن مجال استخدام هذه الطريقة أوسع من الطريقة البيانية، حيث تستخدم لحل المسائل متعددة المتغيرات، وتعد هذه الطرقة تمهيدا لفهم طريقة السمبلكس، والتي تفوق إمكانياتها الطريقتين: البيانية والجبرية.

I. الشكل القانوني لنماذج البرمجة الخطية:

يمكن القول أن نموذج البرمجة الخطية مكتوب على شكله النموذجي (القانوني)، إذا تحقق الشرطان:

- ✓ جميع القيود الهيكلية للنموذج تكون:
  - ➢ **أقل** أو **تساوي** في حالة نموذج التعظيم (Max)؛
  - ➢ **أكبر** أو **تساوي** في حالة نموذج التدنية (Min).
- ✓ جميع متغيرات الأساس تكون موجبة أو معدومة ($X_j \geq 0 : j=1 \ldots. n$).

وبناءً على ذلك يمكن التمييز بين 3 حالات:

1. الحالة الأولى: إشارات القيود الهيكلية للنموذج (≤، =، ≥)

يمكن أن تحتوي نماذج البرمجة الخطية على قيود وظيفية بإشارات لا تتوافق مع دالة الهدف، كأن يكون النموذج من نوع تعظيم (Max) وقيوده الهيكلية بإشارات **أكبر أو تساوي**، وهي بذلك لا تحقق شرط الشكل النموذجي للنموذج الخطي، لذلك يجب تحويلها إلى إشارة **أقل أو تساوي** وذلك بضرب طرفي القيد في (-1) لتحويل إشارتها، والعكس لنموذج التدنية، فإن كانت قيوده بإشارات **أقل أو تساوي** يتم ضرب طرفي المتراجحات في (-1) لتتحول بذلك إلى إشارات **أكبر أو تساوي**.

مثال 1: جد الشكل القانوني لنموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max } Z = 4X_1+2X_2+6X_3$$

$$S/C \quad \left|\begin{array}{l} 8X_1+10X_2+12X_3 \geq 400 \\ 14X_1+16X_2+18X_3 \leq 800 \\ 20X_1+22X_2+24X_3 \geq 2000 \\ X_1 ; X_2 ; X_3 \geq 0 \end{array}\right.$$

نلاحظ أن القيدين الأول والأخير لا يحققان شروط الشكل النموذجي للنموذج أعلاه، لذلك وجب كتابتهما وفق إشارة أقل أو تساوي وذلك لأن النموذج في حالة تعظيم، وعليه يتم ضرب طرفي المتراجحة في (-1):

$8X_1+10X_2+12X_3 \geq 400 \ldots\ldots \times (-1) \Rightarrow \quad -8X_1-10X_2-12X_3 \leq -400$

$20X_1+22X_2+24X_3 \geq 2000 \ldots \times (-1) \Rightarrow \quad -20X_1-22X_2-24X_3 \leq -2000$

ومنه نحصل على الشكل القانوني للنموذج كالتالي:

$$\text{Max } Z = 4X_1+2X_2+6X_3$$

$$S/C \quad \left|\begin{array}{l} -8X_1-10X_2-12X_3 \leq -400 \\ 14X_1+16X_2+18X_3 \leq 800 \\ -20X_1-22X_2-24X_3 \leq -2000 \\ X_1 ; X_2 ; X_3 \geq 0 \end{array}\right.$$

أما إن كان النموذج يحتوي على قيود بإشارات تساوي تماما، فذلك يعني أن القيد يمكن كتابته وفق متراجحتين، فإما أن يكون بإشارة أكبر أو يساوي أو أقل أو يساوي، وهنا يمكن التمييز بين حالتين:

- في حالة نموذج التعظيم، فإن القيد الذي يكون بإشارة أكبر أو تساوي يتم ضرب طرفيه في القيمة (-1) ليتحول إلى إشارة أقل أو تساوي؛

- في حالة نموذج التدنية، فإن القيد الذي يكون بإشارة أقل أو تساوي يتم ضرب طرفيه في القيمة (1-) ليتحول إلى إشارة أكبر أو تساوي.

مثال 2: جد الشكل القانوني لنموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Min } Z= 4X_1+8X_2+2X_3$$
$$S/C \quad \begin{cases} 12X_1+30X_2+20X_3 \geq 200 \\ 4X_1+24X_2+2X_3 \geq 600 \\ 6X_1+8X_2+ 9X_3 = 400 \\ X_1 ; X_2 ; X_3 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن القيد الأخير لا يحقق شروط الشكل النموذجي للنموذج أعلاه لأنه مكتوب بإشارة (=)، لذلك يتوجب تحويله وفق إشارة أكبر أو تساوي وذلك لأن النموذج من نوع تدنية، وعليه يمكن كتابته كما يلي:

$$6X_1+8X_2+ 9X_3 \leq 400$$
$$6X_1+8X_2+ 9X_3 \geq 400$$

نلاحظ أن المتراجحة الأولى لا تحقق شرط الشكل القانوني لذلك وجب تحويلها إلى إشارة أكبر أو تساوي، وذلك بضرب طرفيها في القيمة (1-)، فتصبح:

$$6X_1+8X_2+ 9X_3 \leq 400 \ldots\ldots \times (-1) \quad \Rightarrow \quad -6X_1 -8X_2 -9X_3 \geq - 400$$

فيصبح النموذج وفق الشكل القانوني كالتالي:

$$\text{Min } Z= 4X_1+8X_2+2X_3$$
$$S/C \quad \begin{cases} 12X_1+30X_2+20X_3 \geq 200 \\ 4X_1+24X_2+2X_3 \geq 600 \\ -6X_1 -8X_2 -9X_3 \geq -400 \\ 6X_1+8X_2+ 9X_3 \geq 400 \\ X_1 \geq ; X_2 ; X_3 \geq 0 \end{cases}$$

2. الحالة الثانية: إشارات المتغيرات غير محددة ($X_j \in R$)

في مسائل البرمجة الخطية عموما تكون متغيرات الأساس إما موجبة أو معدومة، إلا أنه في بعض مسائل قد تأخذ قيما سالبة، وهذا ما يفسر اقتصاديا بانخفاض كمية الإنتاج مثلا، وهذا ما يعبر عنه رياضيا بالكتابة: $X_j \in R$، ذلك أن إشارة المتغيرات غيرة محددة.

ففي هذه الحالة يتوجب علينا كتابة كل متغيرة تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقة في صورة فرق متغيرتين موجبتين على مستوى القيود الهيكلية، وكذا على مستوى دالة الهدف، كما يلي:

$$X_J = X'_J - X''_J$$
$$X'_J \geq 0, \quad X''_J \geq 0$$

ونصبح نستخدم بفرق المتغيرتين $X'_J - X''_J$ بدلا من X_J

فإذا كانت:

$X_J \geq 0$ فـإن: $X'_J - X''_J \geq 0$ أي: $X'_J \geq X''_J$

$X_J \leq 0$ فـإن: $X'_J - X''_J \leq 0$ أي: $X'_J \leq X''_J$

مثال 3: أكتب نموذج البرمجة الخطية أدناه على الشكل القانوني:

$$\text{Max } Z= 1X_1+2X_2$$
$$S/C \quad \begin{cases} X_1+X_2 \leq 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2X_1+X_2 \leq 12 \\ X_1\,;\, X_2 \in \ R \end{cases}$$

نلاحظ أن إشارات القيود لنموذج التعظيم أعلاه محققة، إضافة إلى قيود عدم السلبية، عدا المتغيرة x_2 والتي يجب علينا تعويضها بفرق متغيرتين موجبتين كما يلي:

$$Max\ Z= 1X_1+2\,(X'_2 - X''_2)$$

$$S/C \begin{cases} X_1+(X'_2 - X''_2) \leq 7 \\ 2X_1+(X'_2 - X''_2) \leq 12 \\ X_1\,;\, X'_2 ; X''_2 \geq 0 \end{cases}$$

3. الحالة الثالثة: إشارة المتغيرات سالبة ($X_j < 0$)

قد تأخذ بعض متغيرات نموذج البرمجة الخطية قيما سالبة، فقد يظهر مثلا في فكرة رصيد الحساب الذي قد يكون في بعض الأحيان سالبا، وبغرض كتابة مثل هذه النماذج في شكلها القانوني والذي يشترط أن تكون متغيرا النموذج فيه موجبة أو معدومة، يتوجب تعويض كل متغيرة سالبة بمتغيرة أخرى ($- X'_j$)، على مستوى القيود الهيكلية وكذا على مستوى دالة الهدف، حيث أن X'_j متغيرة موجبة أو معدومة، أي:

$$xj = - x'j$$
$$x'j \geq 0$$

مثال 4: أكتب نموذج البرمجة الخطية أدناه على الشكل النموذجي:

$$Max\ Z= \ 7X_1+5X_2$$

$$S/C \begin{cases} 7X_1+9X_2 \ \leq \ 10 \\ 8X_1+4X_2 \leq 20 \\ X_1 < 0 \\ X_1;X_2 \geq \ 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن المتغيرة X_1 لا تحقق شرط عدم سلبية متغيرات الأساس، وبغرض جعلها تحقق ذلك يتوجب علينا تعويضها بمتغيرة أخرى ($- X'_1$) حيث أن $X'_1 \geq 0$، وعليه يصبح النموذج كالتالي:

$$Max\ Z= \ -7X'_1+7X_2$$

$$S/C \begin{cases} -7X'_1+9X_2 \ \leq \ 10 \\ - 8X'_1+4X_2 \leq 20 \\ X'_1;X_2 \geq \ 0 \end{cases}$$

II. المتغيرات الوهمية:

القيود الهيكلية هي عبارة عن كمية مستخدمة (في الطرف الأيسر)، وكمية متاحة في الطرف الأيمن، وبغرض حل نموذج البرمجة الخطية ينبغي أولا تحويل تلك المتراجحات (القيود) إلى معادلات، وذلك بإضافة متغيرات جديدة غير سالبة تسمى متغيرات وهمية، والتي تعبر اقتصاديا عن الكمية المتبقية أو غير المستخدمة، وعادة ما يُرمز لمتغير الفرق بالرمز S.

1. في حالة القيود الهيكلية التي تكون بالإشارة أقل أو تساوي:

نقوم بإضافة متغيرة وهمية مسبوقة بإشارة (+)، أن الكمية المستخدمة دائما أقل من المتاحة ولذا وجب إضافة كمية متبقية للوصول إلى الاستخدام التام.

$$X_1+5X_2+7X_3+2X_4 \leq \ 500 \Rightarrow X_1+5X_2+7X_3+2X_4 + \mathbf{S_1} = 500$$

2. في حالة القيود الهيكلية التي تكون بالإشارة أكبر أو تساوي:

نقوم بإضافة متغيرة وهمية مسبوقة بإشارة (-)، أن الكمية المستخدمة قد تجاوزت المتاح ولذا وجب إنقاص هذه الكمية التي تفوق المتاح.

$X_1+5X_2+7X_3+2X_4 \geq 500 \Rightarrow X_1+5X_2+7X_3+2X_4 - \mathbf{S_1} = 500$

3. المتغيرات الوهمية في دالة الهدف:

تكون المتغيرات الوهمية على مستوى دالة الهدف ذات معاملات معدومة، كون أن هذه المتغيرات لا تحقق أي ربح او خسارة للمؤسسة (في كلا الحالتين التعظيم او التدنية على التوالي).

III. الشكل المعياري لنماذج البرمجة الخطية:

يكون نموذج البرمجة الخطية مكتوبا على شكله المعياري، إذا تحققت الشروط التالية:

أ- القيود الهيكلية مكتوبة على شكل معادلات بدلا من متراجحات؛

ب- يجب أن يكون الطرف الأيمن للقيود الهيكلية (المتاح) موجبا أو معدوما؛

ت- يجب أن تكون جميع متغيرات النموذج موجبة أو معدومة.

مثال 5: جد الشكل المعياري لنموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max } Z = X_1+2X_2+5X_3$$

$$S/C \left| \begin{array}{l} 3X_1+X_2+4X_3 \geq 60 \\ 7X_1+9X_2+5X_3 = 88 \\ X_1+4X_2+X_3 \leq -45 \\ X_1;\ X_2;\ X_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

نلاحظ أن القيود الثلاثة لا تحقق الشروط السابق وعليه يجب تحويلها بما يتوافق والشكل المعياري:

$3X_1+X_2+4X_3 \geq 60 \quad \rightarrow 3X_1+X_2+4X_3 - S1 = 60 > 0$

$7X_1+9X_2+5X_3 = 88 \quad \rightarrow 7X_1+9X_2+5X_3 = 88 > 0$

$X_1+4X_2+X_3 \leq -45 \quad \rightarrow (-1)[X_1+4X_2+X_3+S_3] = (-1)(-45) \rightarrow -X_1-4X_2-X_3-S_3 = 45 > 0$

ويصبح الشكل المعياري النهائي للنموذج أعلاه كالتالي:

$$\text{Max } Z = X_1+2X_2+5X_3$$

$$S/C \left| \begin{array}{l} 3X_1+X_2+4X_3 - S1 = 60 \\ 7X_1+9X_2+5X_3 = 88 \\ -X_1-4X_2-X_3 - S3 = 45 \\ X_1;\ X_2;\ X_3;S1;S3 \geq 0 \end{array} \right.$$

IV. خطوات حل نماذج البرمجة الخطية باستخدام الطريقة الجبرية:

لحل نموذج البرمجة الخطية باستخدام الطريقة الجبرية، سنأخذ المثال التالي:

مثال 6: ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max } Z = 5X_1+4X_2+3X_3$$

$$S/C \left| \begin{array}{l} X_1+X_2+3X_3 \leq 100 \\ 4X_1+X_2+6X_3 \leq 200 \\ X_1;\ X_2;\ X_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

لحل النموذج أعلاه والوصول إلى الحل الأمثل، نقوم بإتباع الخطوات التالية:

1. كتابة النموذج على الشكل المعياري:

كما تمت الإشارة إليه سابقا، يتم تحويل قيود النموذج إلى معادلات وذلك بإضافة متغيرات وهمية (الفرق) حتى يتوافق وشروط الشكل المعياري لنماذج البرمجة الخطية، وعليه يصبح النموذج كالتالي:

$$\text{Max } Z = 10X_1 + 4X_2 + 6X_3$$
$$S/C \begin{cases} 2X_1 + 2X_2 + 6X_3 + S_1 = 100 \\ 4X_1 + X_2 + 6X_3 + S_2 = 200 \\ X_1; X_2, X_3; S_1; S_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{Max } Z = 10X_1 + 4X_2 + 6X_3 + 0S_1 + 0S_2 \quad S/C \begin{cases} 2X_1 + 2X_2 + 6X_3 + S_1 + 0S_2 = 100 \\ 4X_1 + X_2 + 6X_3 + 0S1 + S_2 = 200 \\ X_1 \geq; X_2; X_3; S_1; S_2 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ من خلال الشكل المعياري للنموذج أعلاه، أنه عبارة عن جملة معادلات تحتوي على 5 متغيرات (3 متغيرات اساسية، 2 متغيرات وهمية)، علما أنه يحتوي على معادلتين، وبناء على ذلك فإنه يتعذر علينا حل الجملة التي يكون فيها عدد المجاهيل يفوق عدد المعادلات.

لكي نتمكن من حل النموذج اعلاه يجب جعل عدد المجاهيل مساويا لعدد المعادلات، ويتم ذلك عن طريق عدم 3 متغيرات (الفرق بين عدد المجاهيل وعدد المعادلات)، والحل المتحصل عليه يسمى حل الأساس، والذي يتكون من 3 متغيرات معدومة تسمى متغيرات خارج الأساس، وأخرى غير معدومة تسمى متغيرات الأساس.

2. **تعدد حلول الأساس:**

حتى نتمكن من حل النموذج أعلاه، يتوجب علينا في كل مرة عدم ثلاث (3) متغيرات، وبالتالي يتم في كل مرة اختيار توليفة من المتغيرات التي سيتم عدمها واستنتاج حل الأساس لها، وعليه فإنه يوجد عدد من الطرق التي يمكن بها اختيار هذه المتغيرات أو التوليفات والذي يمكن حسابه رياضيا باستخدام التوفيقة كالتالي:

$$= 10C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!}$$

أي أن النموذج يقبل 10 توليفات مختلفة يكون بها 3 متغيرات معدومة (متغيرا القرار أو متغيرات وهمية أو الاثنين معا)، ويتم حساب الأخرى بتعويضها في القيود الهيكلية، ومن ثم استنتاج حل الأساس.
وعليه يتم تلخيص حلو ل الأساس في الجدول التالي:

الجدول يبين تعداد حلول الأساس للمثال 06

الرقم	متغيرات خارج الأساس	التعويض في القيود الهيكلية	متغيرات الأساس	نوع الحل
01	$X_1 = X_2 = X_3 = 0$	$1(0) + 1(0) + 3(0) = 100$ $4(0) + 1(0) + 6(0) = 200$	$S_1 = 100$ $S_2 = 200$	حل مقبول
02	$X_1 = S_1 = S_2 = 0$	$1(0) + 1X_2 + 3X_3 + 0 = 100$ $4(0) + 1X_2 + 6X_3 + 0 = 200$	$X_3 = 100/3$ $X_2 = 0$	حل مقبول
03	$X_2 = S_1 = S_2 = 0$	$1X_1 + 1(0) + 3X_3 + 0 = 100$ $4X_1 + 1(0) + 6X_3 + 0 = 200$	$X_1 = 0$ $X_3 = 100/3$	حل مقبول
04	$X_3 = S_1 = S_2 = 0$	$1X_1 + 1X_2 + 3(0) + 0 = 100$ $4X_1 + 1X_2 + 6(0) + 0 = 200$	$X_1 = 200$ $X_2 = -100$	حل مرفوض
05	$X_1 = X_2 = S_1 = 0$	$1(0) + 1(0) + 3X_3 + 0 = 100$ $4(0) + 1(0) + 6X_3 + S_2 = 200$	$X_3 = 100/3$ $S_2 = 0$	حل مقبول
06	$X_1 = X_2 = S_2 = 0$	$1(0) + 1(0) + 3X_3 + S_1 = 100$ $4(0) + 1(0) + 6X_3 + 0 = 200$	$X_3 = 100/3$ $S_1 = 0$	حل مقبول
07	$X_1 = X_3 = S_1 = 0$	$1(0) + 1X_2 + 3(0) + 0 = 100$ $4(0) + 1X_2 + 6(0) + S_2 = 200$	$X_2 = 100$ $S_2 = 100$	حل مقبول
08	$X_1 = X_3 = S_2 = 0$	$1(0) + 1X_2 + 3(0) + S_1 = 100$ $4(0) + 1X_2 + 6(0) + 0 = 200$	$X_2 = 200$ $S_1 = -100$	حل مرفوض
09	$X_2 = X_3 = S_1 = 0$	$1X_1 + 1(0) + 3(0) + 0 = 100$ $4X_1 + 1(0) + 6(0) + S_2 = 200$	$X_1 = 100$ $S_2 = -200$	حل مرفوض
10	$X_2 = X_3 = S_2 = 0$	$1X_1 + 1(0) + 3(0) + S_1 = 100$ $4X_1 + 1(0) + 6(0) + 0 = 200$	$X_1 = 50$ $S_1 = 50$	حل مقبول

يلاحظ من خلال الجدول اعلاه أن هناك حلول أساس (متغيرات الأساس، متغيرات خارج الأساس) موجبة أو معدومة، وتسمى هذه الحلول بحلول الأساس المقبولة لأنها لا تحقق قيود عدم سلبية المتغيرات، و هناك حلول أساس (متغيرات الأساس، متغيرات خارج الأساس) سالبة وتسمى بحلول الأساس غير المقبولة، لأنها لا تحقق قيود عدم سلبية المتغيرات.

3. **تقييم دالة الهدف عند حلول الأساس المقبولة:**

من أجل كل حل أساس مقبول، سوف تكون هناك قيمة لدالة الهدف، وما يهمنا هو حل الأساس المقبول الذي يعطي لدالة الهدف أمثل قيمة وهو الحل رقم: **04**

$$Z = 10(9) + 4(39) + 6(0) = 246$$

ويتم تفسير حل الأساس المقبول الأمثل المتوصل إليه كما يلي:

$X1= 9$ أي على المؤسسة إنتاج 9 وحدة من المنتج الأول؛

$X_2= 39$ أي على المؤسسة إنتاج 39 وحدات من المنتج الثاني؛

$X_3= 0$ أي على المؤسسة عدم إنتاج أي وحدة من المنتج الثالث.

وعند تعويض قيم حل الأساس المقبول الأمثل في القيود الهيكلية نلاحظ أن القيدين الأول والثاني محققان بإشارة تساوي ما يعني أنهما مشبعان، أي: $S_1 = S_2 = 0$.

4. **التفسير الهندسي لحلول الأساس المقبولة:**

لمعرفة التفسير الهندسي لحلول الأساس المقبولة، سنأخذ المثال أدناه.

مثال 7: ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max } Z= 10 X_1+12 X_2$$

$$S/C \quad \begin{cases} X_1+2X_2 \le 20 \\ 3X_1+2X_2 \le 48 \\ 2X_1+2X_2 \le 26 \\ X_1 ; X_2 \ge 0 \end{cases}$$

سنقوم بحل هذا النموذج وفق طريقة تعداد حلول الأساس ثم وفق الطريقة البيانية. وكمرحلة أولى يتعين علينا كتابة هذا النموذج على الشكل المعياري (إضافة متغيرات الفرق) ليصبح كالتالي:

$$\text{Max } Z= 5X1+6X_2$$

$$S/C \quad \begin{cases} 2X_1+2X_2 +S_1= 40 \\ 2X_1+X_2 +S_2= 30 \\ X_1+2X_2 +S_3= 20 \\ X_1 , X_2\ S_1, S_2, S_3 \ge 0 \end{cases}$$

وبما أن النموذج يحتوي جملة معادلات بها 5 متغيرات، فإنه يتعين علينا عدم متغيرتين، حيث أن النموذج يقبل 10 توليفات للمتغيرات المعدومة وبالتالي فإنه يقبل 10 حلول أساس، وذلك وفقا للعلاقة:

$$= 10C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!}$$

وبناء على ذلك، نُلخص حلول الأساس في الجدول أدناه:

تعداد حلول الأساس للمثال 07

نوع الحل	متغيرات الأساس	التعويض في القيود الهيكلية	متغيرات خارج الأساس	الرقم
حل مقبول	$S_1 = 40$ $S_2 = 30$ $S_3 = 20$	$2(0)+2(0) +S_1= 40$ $2(0)+1(0) +S_2= 30$ $1(0)+2(0)+S_3 = 20$	$X_1 = X_2 = 0$	**01**
حل مرفوض	$X_2 =20$ $S_2 =10$ S_3 -20	$2(0)+2X_2 +0= 40$ $2(0)+1X_2 +S_2= 30$ $1(0)+2X_2+S_3 = 20$	$X1 = S_1 = 0$	**02**
حل مرفوض	$X_2 = 30$ $S_1 = -20$ $S_3 = -40$	$2(0)+2X_2 +S_1= 40$ $2(0)+1X_2 +0= 30$ $1(0)+2X_2+S_3 = 20$	$X_1 = S_2 = 0$	**03**
حل مقبول	$X_2 = 10$ $S_1 = 20$	$2(0)+2X_2 +S_1= 40$ $2(0)+1X_2 +S_2= 30$	$X_1 = S_3 = 0$	**04**

		$1(0)+2X_2+0 = 20$	$S_2 = 20$	
05	$X_2 = S_1 = 0$	$2X_1+2(0)+0= 40$ $2X_1+1(0)+S_2= 30$ $1X_1+2(0)+S_3 = 20$	$X_1 = 20$ $S_2 = -10$ $S_3 = 0$	حل مرفوض
06	$X_2 = S_2 = 0$	$2X_1+2(0)+S_1= 40$ $2X_1+1(0)+0= 30$ $1X_1+2(0)+S_3 = 20$	$X_1 = 15$ $S_1 = 10$ $S_3 = 5$	حل مقبول
07	$X_2 = S_3 =0$	$2X_1+2(0)+S_1= 40$ $2X_1+1(0)+S_2= 30$ $1X_1+2(0)+0 = 20$	$X_1 = 20$ $S_1 = 0$ $S_2 = -10$	حل مرفوض
08	$S_1 = S_2 = 0$	$2X_1+2X_2+0= 40$ $2X_1+1X_2+0= 30$ $1X_1+2X_2+S_3 = 20$	$X_1 = 10$ $X_2 = 10$ $S_3 = -10$	حل مرفوض
09	$S_1 = S_3 = 0$	$2X_1+2X_2+0= 40$ $2X_1+1X_2+S_2= 30$ $1X_1+2X_2+0 = 20$	$X_1 = 20$ $X_2 = 0$ $S_2 = -10$	حل مرفوض
10	$S_2 = S_3 = 0$	$2X_1+2X_2+S_1= 30$ $2X_1+1X_2+0= 40$ $1X_1+2X_2+0 = 20$	$X_1 = 20$ $X_2 = 0$ $S_1 = -10$	حل مرفوض

عند تقييم دالة الهدف عند حلول الأساس المقبولة المتوصل إليها أعلاه، نلاحظ أن الحل الأمثل للنموذج يتمثل في الحل رقم 6:

$Z = 5(15) + 12(0) = 75$

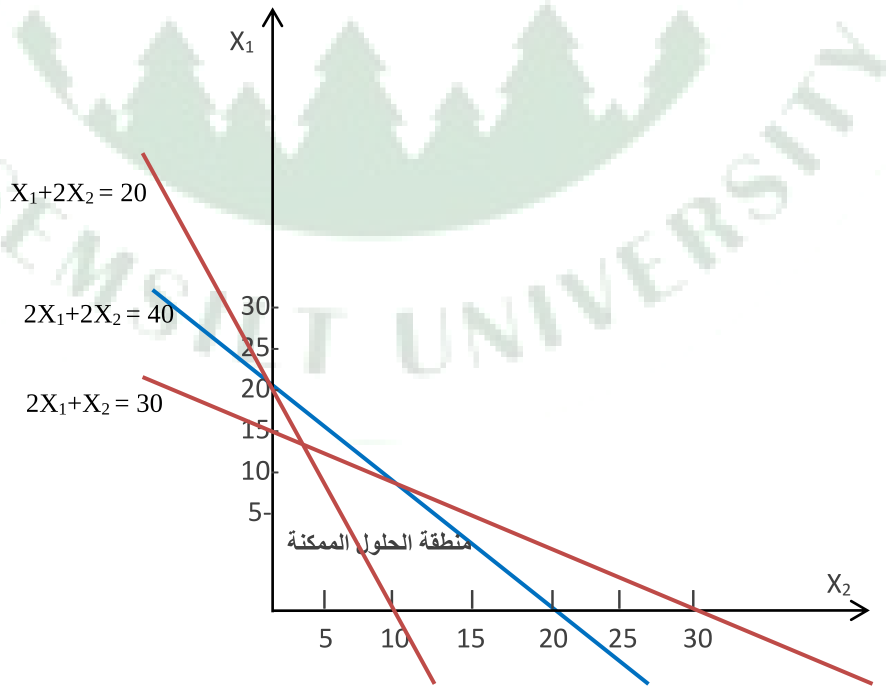
أما بيانيا فيكون حل النموذج أعلاه كما يلي:

القيد الأول: $2X_1+2X_2 = 40$ يُمثل بالنقطتين: A(0,20)، B(20,0).

القيد الثاني: $2X_1+X_2 = 30$ يُمثل بالنقطتين: C(0,30)، D(15,0).

القيد الثالث: $X_1+2X_2 = 20$ يُمثل بالنقطتين: E(0,10)، F(20,0).

التمثيل البياني لقيود المثال 7



V. حلول الأساس المقبولة المتفسخة والمتجاورة:

نسمي حلول الأساس المقبولة **المتفسخة** كل حلول الأساس المقبولة التي تتضمن متغيرة أساس أو أكثر معدومة، ونسمي حلول الأساس المقبولة **المتجاورة** كل حلول الأساس المقبولة التي تتضمن n-1 متغيرة أساس مشتركة، حيث تمثل n عدد القيود.

مثال 8: ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\begin{array}{ll} & \text{Max } Z = 13X_1+5X_2 \\ S/C & \left|\begin{array}{l} 3X_1+2X_2 \leq 240 \\ 5X_1+10X_2 \leq 400 \\ 6X_1+8X_2 \leq 480 \\ X_1;\ X_2 \geq 0 \end{array}\right. \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} & \text{Max } Z = 13X_1+5X_2 \\ S/C & \left|\begin{array}{l} 3X_1+2X_2+\mathbf{S_1} = 240 \\ 5X_1+10X_2+\mathbf{S_2} = 400 \\ 6X_1+8X_2+\mathbf{S_3} = 480 \\ X_1;\ X_2;S_1;S_2;S_3 \geq 0 \end{array}\right. \end{array}$$

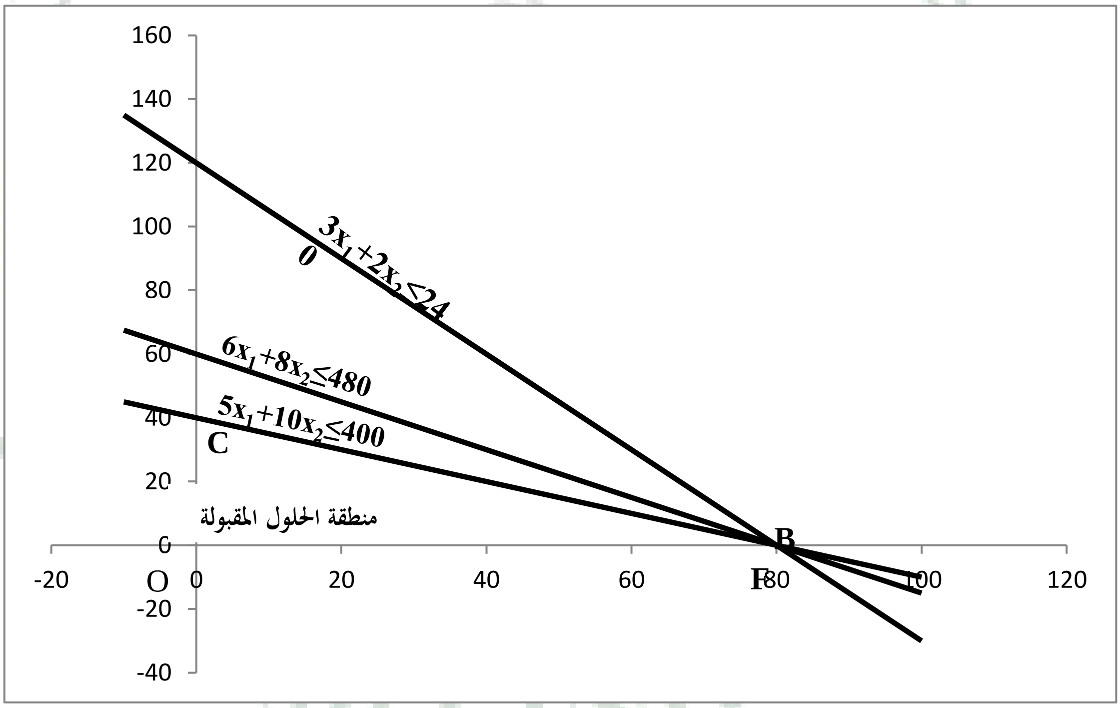
يتم تمثيل هذا النموذج بيانيا كما يلي:

القيد الأول: $3X_1+2X_2 = 240$ يُمثل بالنقطتين: A(0,120)، B(80,0).

القيد الثاني: $5X_1+10X_2 = 400$ يُمثل بالنقطتين: C(0,40)، D(80,0).

القيد الثالث: $6X_1+8X_2 = 480$ يُمثل بالنقطتين: E(0,60)، F(80,0).

التمثيل البياني لقيود المثال 8



تمثل المنطقة OCB منطقة الحلول المقبولة، حيث أنه يتقاطع أكثر من مستقيم عند النقطة B(80,0).
وبما أن النموذج يحتوي 3 معادلات بها 5 متغيرات، فإنه يتعين علينا عدم متغيرتين، حيث أن النموذج يقبل 10 توليفات للمتغيرات المعدومة وبالتالي فإنه يقبل 10 حلول أساس، وذلك وفقا للعلاقة:

$$= 10C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!}$$

وبناء على ذلك، نُلخص حلول الأساس في الجدول أدناه:

تعداد حلول الأساس للمثال 08

الرقم	متغيرات خارج الأساس	التعويض في القيود الهيكلية	متغيرات الأساس	نوع الحل
01	$x_1 = x_2 = 0$	$3(0)+2(0)+S_1= 240$ $5(0)+10(0)+S_2= 400$ $6(0)+8(0)+S_3 = 480$	$S_1 = 240$ $S_2 = 400$ $S_3 = 480$	مقبول
02	$x_1 = S_1 = 0$	$3(0)+2x_2+0= 240$ $5(0)+10x_2+S_2= 400$ $6(0)+8x_2+S_3 = 480$	$x_2 = 120$ $S_2 = -800$ $S_3 = -480$	مرفوض
03	$x_1 = S_2 = 0$	$3(0)+2x_2+S_1= 240$ $5(0)+10x_2+0= 400$ $6(0)+8x_2+S_3 = 480$	$x_2 = 40$ $S_1 = 160$ $S_3 = 160$	مقبول
04	$x_1 = S_3 = 0$	$3(0)+2x_2+S_1= 240$ $5(0)+10x_2+S_2= 400$ $6(0)+8x_2+0 = 480$	$x_2 = 60$ $S_1 = 120$ $S_2 = -200$	مرفوض
05	$x_2 = S_1 = 0$	$3x_1+2(0)+0= 240$ $5x_1+10(0)+S_2= 400$ $6x_1+8(0)+S_3 = 480$	$x_1 = 80$ $S_2 = 0$ $S_3 = 0$	**مقبول متفسخ**
06	$x_2 = S_2 = 0$	$3x_1+2(0)+S_1= 240$ $5x_1+10(0)+0 = 400$ $6x_1+8(0)+S_3 = 480$	$x_1 = 80$ $S_1 = 0$ $S_3 = 0$	**مقبول متفسخ**
07	$x_2 = S_3 =0$	$3x_1+2(0)+S_1= 240$ $5x_1+10(0)+S_2= 400$ $6x_1+8(0)+0 = 480$	$x_1 = 80$ $S_1 = 0$ $S_2 = 0$	**مقبول متفسخ**
08	$S_1 = S_2 = 0$	$3x_1+2x_2+0= 240$ $5x_1+10x_2+0 = 400$ $6x_1+8x_2+S_3 = 480$	$x_1 = 120$ $x_2 = -60$ $S_3 = 240$	مرفوض
09	$S_1 = S_3 = 0$	$3x_1+2x_2+0= 240$ $5x_1+10x_2+S_2 = 400$ $6x_1+8x_2+0 = 480$	$x_1 = 80$ $x_2 = 0$ $S_2 = 0$	**مقبول متفسخ**
10	$S_2 = S_3 = 0$	$3x_1+2x_2+S_1= 240$ $5x_1+10x_2+0 = 400$ $6x_1+8x_2+0 = 480$	$x_1 = 80$ $x_2 = 0$ $S_1 = 0$	**مقبول متفسخ**

نلاحظ أن الحلول المقبولة المتفسخة ما هي إحداثيات النقاط التي تتقاطع عندها قيود النموذج، وعليه نستنتج أن حلول الأساس المقبولة المتفسخة هي النقاط الرأسية التي يتقاطع عند عدد من المستقيمات يفوق عدد متغيرات الأساس.

كما نلاحظ أن هناك مجموعة من الحلول المقبولة تشترك في متغيرتي الأساس $(n-1)=2$ مثل:

الحل المقبول رقم 01 والحل المقبول رقم 07 يشتركان في متغيرتي الأساس: S_1 وS_2 فيقال عنهما أنهما حلان متجاوران؛

الحل المقبول رقم 03 والحل المقبول رقم 10 يشتركان في متغيرتي الأساس: x_2 وS_1 فيقال عنهما أنهما حلان متجاوران.

أما الحلول المقبولة التي تشترك في أقل من متغيرتي أساس فيقال عنها أنها غير متجاورة.

المحور الرابع

طريقة السمبلكس في البرمجة الخطية

تعد طريقة السمبلكس وسيلة رياضية ذات كفاءة عالية في استخراج الحلول المثلى لمشكلات البرمجة الخطية بصورة عامة، وتستخدم هذه الطريقة لحل النماذج الرياضية للبرمجة الخطية جبرياً مهما كان عدد المتغيرات وهي الأكثر استخداماً لحل النماذج الرياضية.

تقوم هذه الطريقة بفحص منطقة الحلول الممكنة بشكل متسلسل وباستخدام مفاهيم رياضية بسيطة، ويتم بشكل متكرر، وهذا يعني إعادة نفس الإجراءات مرة تلو الأخرى ولحين الوصول للحل الأمثل.
في حالة وجود أكثر من متغيرين في البرنامج الخطي فإنه لا يمكن استخدام الطريقة البيانية وإنما علينا استخدام طريقة السمبلكس التي ابتكرها دانتزاك عام 1947 وهي عبارة عن أسلوب يعتمد على اختيار المتغيرات ذات التأثير الأساسي على كل من دالة الهدف والقيود ويهمل المتغيرات الأخرى التي لا تؤثر على دالة الهدف والقيود.
قبل حل النموذج بطريقة السمبلكس، وتحويل نمودج البرمجة الخطية من الصيغة الأولية إلى الصيغة النموذجية، علينا أولاً معرفة أنواع الصيغ التي يمكن كتابة البرنامج الخطي على أساسها.

I. الصيغة القانونية والمختلطة للبرنامج الخطي:

1. الصيغة القانونية:

هناك نوعان من صيغ البرامج الخطية وهي حسب الحالة كما يلي:

- **حالة التعظيم :** في هذه الحالة تكون الصيغة القانونية للبرنامج الخطي على النحو التالي:
  - دالة الهدف تكون في حالة تعظيم؛
  - التشكيلة الخطية لجميع القيود تكون في حالة أصغر أو تساوي عددا ثابتا موجبا؛
  - جميع المتغيرات تكون غير سالبة.

أي أن الصيغة القانونية تكتب كما يلي:

$$Max(Z) = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots \dots \dots . + C_{n1}x_n$$
$$S/C \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots \dots \dots \dots a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots \dots \dots \dots a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots \dots \dots \dots a_{in}x_n \le b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots \dots \dots a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1; x_2; \dots \dots \dots \dots x_n \ge 0 \end{cases}$$

أما الصيغة القانونية بالشكل المصفوفي تكون كما يلي:

$$Max(Z) = C^tX$$
$$S/C \begin{cases} AX \le B \\ X \ge 0 \end{cases}$$

حيث: C^t يعبر عن سطر معاملات دالة الهدف
A تعبر عن مصفوفة القيود
B تعبرعن شعاع الثوابت

- **حالة التدنئة:** فحتى يأخذ البرنامج الخطي شكل الصيغة القانونية يجب أن يتميز بما يلي:
  - دالة الهدف تكون في حالة تدنئة ؛

- التشكيلة الخطية لجميع القيود تكون في حالة أكبر أو تساوي عددا ثابتا موجبا؛
- جميع المتغيرات تكون غير سالبة.

أي أن الصيغة القانونية تكتب كما يلي:

$$Min(Z) = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots \ldots\ldots. + C_{n1}x_n$$

$$S/C \left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots \ldots\ldots\ldots a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots \ldots\ldots\ldots a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots \ldots\ldots\ldots a_{in}x_n \geq b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots \ldots\ldots a_{mn}x_n \geq b_m \end{array} \right.$$

$$x_1; x_2; \ldots\ldots\ldots\ldots x_n \geq 0$$

أما الصيغة القانونية بالشكل المصفوفي تكون كما يلي:

$$Min(Z) = C^tX$$

$$S/C \left| \; AX \geq B \right.$$

$$X \geq 0$$

2. الصيغة المختلطة :

وشروط هذه الصيغة:

- أن تكون دالة الهدف مكتوبة على شكل تعظيم أو تدنئة؛
- أن تكون القيود مكتوبة بإشارة أقل أو يساوي أو أكبر أو يساوي أو هيأة معادلة أي مساواة؛
- جميع المتغيرات تكون غير سالبة.

أي أن الصيغة المختلطة تكتب كما يلي" :

$$Min, (Max)(Z) = \mathrm{C}_1x_1 + \mathrm{C}_2\mathrm{x}_2 + \cdots \ldots\ldots. + \mathrm{C}_{n1}x_\mathrm{n}$$

$$S/C \left| \begin{array}{l} \mathrm{a}_{11}x_1 + \mathrm{a}_{12}x_2 + \cdots \ldots\ldots\ldots a_{1n}x_n \geq, = \leq \mathrm{b}_1 \\ \mathrm{a}_{21}x_1 + \mathrm{a}_{22}x_2 + \cdots \ldots\ldots\ldots a_{2n}x_n \geq, = \leq \mathrm{b}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{a}_{i1}x_1 + \mathrm{a}_{i2}x_2 + \cdots \ldots\ldots\ldots a_{in}x_n \geq, = \leq \mathrm{b}_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{a}_{m1}x_1 + \mathrm{a}_{m2}x_2 + \cdots \ldots\ldots a_{mn}x_n \geq, =, \leq \mathrm{b}_m \end{array} \right.$$

$$x_1; x_2; \ldots\ldots\ldots\ldots x_\mathrm{n} \geq 0$$

3. الصيغة النموذجية للبرنامج الخطي:

وفيها تكون كل القيود على شكل معادلات، أما دالة الهدف فتكون إما في صيغة تعظيم أو صيغة تدنئة، تعتبر الصيغة النموذجية ضرورية لإيجاد الحل الأساسي للبرنامج بطريقة السمبلكس، إذ يجري تحويل أية صيغة مهما كان شكلها إلى الصيغة النموذجية، بإعتبار ذلك أول خطوة في إتجاه الحل.

تتطلب الخطوة الأولى في الطريقة السمبلكس تحويل القيود من صيغة متراجحات إلى صيغة معادلات كالاتي:

- إذا كانت إشارة القيد أقل من أو يساوي يتم إضافة متغير مكمل إلى الجانب الأيسر للقيد ويسمى "متغير وهمي " أو المتغير الزائد أو المتغير الراكد ويرمز له بالرمز $(S_\mathrm{i}; \mathrm{i} = 1,2, \ldots\ldots\ldots\ldots..m)$ ويظهر هذا المتغير بمعامل صفر في دالة الهدف، ويمثل المتغير الوهمي موارد غير مستخدمة مثل

الوقت المستغرق على الآلة، ساعات العمل، الأموال، ساحات المحزن، أو أي من الموارد في المشكلات التي تواجهها المؤسسات. إذا كان القيد مثلا كما يلي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots \ldots \ldots \ldots a_{1n}x_n \leq b_1$$

يصبح القيد:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots \ldots \ldots \ldots a_{1n}x_n + S_1 = b_1$$

- إذا كانت إشارة القيد أكبر من أو يساوي يتم طرح متغير فائض من الجانب الأيسر للقيد ويسمى"المتغير الوهمي " ويرمز له بالرمز $(S_i; i = 1,2, \ldots \ldots \ldots \ldots .. m)$

ثم نضيف متغير وهمي أو اصطناعي إلى الجانب الأيسر للقيد ويرمز له بالرمز(Ai) ويظهر المتغير الوهمي بمعامل صفر في دالة الهدف، أما المتغير الاصطناعي فيظهر بمعامل(M) في دالة الهدف والتي ترمز إلى معامل رقمي كبير جداً، أما إشارتها في دالة الهدف فتكون موجبة(+M)عندما تكون دالة الهدف تدنئة، أما إذا كانت دالة الهدف تعظيم فإن إشارتها تكون سالبة (M−). فمثلا إذا كان القيد على الشكل التالي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots \ldots \ldots \ldots a_{1n}x_n \geq b_1$$

يصبح القيد:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots \ldots \ldots \ldots a_{1n}x_n - S_1 + A_1 = b_1$$

تضاف المتغيرات الاصطناعية إلى المتراجحات الخطية التي تفصل بين طرفيها علامة من نوع أكبر أو يساوي أو المساواة وذلك بهدف الحصول على الحل الأساسي الممكن، وبعد أن يتم الحصول على هذا الحل (الحل الممكن) يجب أن يتم التخلص من هذه المتغيرات وأبعادها عن النموذج (كما سيأتي شرحه في حالة طريقة gMBi

- إذا كانت إشارة القيد يساوي (=) يتم إضافة متغير وهمي أو اصطناعي إلى الجانب الأيسر للقيد ويرمز له بالرمز (Ai)

والجدول التالي يبين القواعد السابقة:

	الإجراء على القيد	دالة الهدف تدنئةMin	دالة الهدف تعظيم Max
اقل من أو يساو	$+1S_i$	$+0S_i$	$+0S_i$
أكبر من أو يساوي	$-1S_i + 1A_i$	$1S_i + MA_i$	$1S_i + MA_i$
يساو	$+1A_i$	$+MA_i$	$-MA_i$

مثال رقم (01): أوجد الصيغة النموذجية للبرنامج الخطي الآتي:

$$Max(Z) = X_1 + 2X_2 - X_3$$
$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 10 \\ X_2 + X_3 \geq 4 \\ X_1 + X_3 \leq 5 \\ X_1; X_2; X_3 \geq 0 \end{cases}$$

الحل: القيد الأول عبارة عن قيد مساواة إذن: $X_1 + X_2 + X_3 = 10 \rightarrow X_1 + X_2 + X_3 + A_1 = 10$

القيد الثاني يحمل إشارة أكبر من أو يساوي إذن: $X_2 + X_3 \geq 4 \rightarrow X_2 + X_3 - S_1 + A_2 = 4$

القيد الثالث حمل إشارة أصغر من أو يساوي ومنه: $X_1 + X_3 \leq 5 \rightarrow X_1 + X_3 + S_2 = 5$

أما دالة الهدف تصبح على النحو التالي: $Max(Z) = X_1 + 2X_2 - X_3 + 0S_1 + 0S_2 - MA_1 - MA_2$

II. إعداد جدول الحل الأولي:

تبدأ طريقة السمبلكس بحل أولي ممكن حيث تكون قيم جميع المتغيرات الحقيقية مساوية للصفر ينتج عن هذا الإعتيادي ربحا مقداره (0)، وتبدأ الطريقة المبسطة عند هذه النقطة ومن ثم سنتحرك نحو بقية النقاط عند الأركان الأخرى إلى أن نصل إلى الحل الأمثل .

تكوين جدول الحل الأولي الأساسي للحصول على حل أولي ممكن والذي يناظر الحل الأولي عند نقطة الأصل في طريقة الحل البياني، ويكون تنظيم بيانات الشكل الصيغة النموذجية من حالة دالة التعظيم في جدول الحل الأولي كما هو مبين في الجدول التالي:

T_1	C_j	C_1	C_2	…………….	C_n	0	0	…………….	0	B
CB	XB	X_1	X_2	…………….	X_n	S_1	S_2	…………….	S_m	
0	S_1	a_{11}	a_{12}	…………….	a_{1n}	1	0	…………….	0	b_1
0	S_2	a_{21}	a_{22}	…………….	a_{2n}	0	1	…………….	0	b_2
:	:	:	:	…………….	:	:	:	…………….	:	:
0	S_i	a_{i1}	a_{i2}	…………….	a_{in}	0	0	…………….	0	b_i
:	:	:	:	…………….	:	:	:	…………….	:	:
0	S_m	a_{m1}	a_{m2}	…………….	a_{mn}	0	0	…………….	1	b_m
Z_j		0	0	…………….	0	0	0	…………….	0	$Z=0$
$\Delta \mathbf{Z} = \mathbf{C}_j - \mathbf{Z}_j$		C_1	C_2	…………….	C_n	0	0	…………….	0	

حيث:

$$Z_j = C^t B X_j S_j$$
$$Z = CB^t B$$

نلاحظ أن متغيرات الأساس الموضوعة في العمود الثاني من الجدول هي نفسها المقابلة للقيمة (1) من أعمدة المصفوفة الأحادية، وتكون في الجدول الحل الأساسي الأول إما متغيرات فجوة او متغيرات إصطناعية أو هما معا، وفي المراحل اللاحقة تزيحها الخوارزمية، وتحل محلها متغيرات أخرى.

وفي هذا الجدول تكون قيم المتغيرات داخل الأساس هي القيم المقابلة لها في العمود الأخير(عمود الثوابت)، أي:

$$(S_1 = b_1; S_2 = b_2; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . S_m = b_m)$$

أما قيمة الدالة الإقتصادية فهي معدومة، وأما بقية عناصر السطر الأخير فتعبر عن تغير معاملات دالة الهدف طيلة مراحل الحل.

III. مثال توضيحي آلية عمل طريقة السمبلكس:

أوجد الصيغة النموذجية وجدول الحل الأساسي الأول للبرنامج الخطي التالي:

$$Max(Z) = 7X_1 + 5X_2$$
$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 \leq 100 \\ 4X_1 + 3X_2 \leq 240 \\ X_1; X_2; \geq 0 \end{cases}$$

1. الصيغة النموذجية:

تصبح القيود أعلاه كما يأتي:

القيد الأول: $2X_1 + X_2 + S_1 = 100$

القيد الثاني: $4X_1 + 3X_2 + S_2 = 240$

وهذا يعني ان عدد الساعات المستخدمة كانت أقل من 100 ساعة بالنسبة للقيد الأول واقل من 240 ساعة بالنسبة للقيد الثاني.
إن المتغيرات الوهمية لا تحقق أي ربح، حيث يتم إضافتها إلى دالة الهدف الأصلية وبمعامل (0)، وعليه تصبح معادلة دالة الهدف:

$$Max(Z) = 7X_1 + 5X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

2. جدول الحل الأساسي الأول للبرنامج:
المتغيرات الغير الأساسية

T_1	C_j	C_1	C_2	0	0	B
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	
0	S_1	2	1	1	0	100
0	S_2	4	3	0	1	240
Z_j		0	0	0	0	$Z = 0$
$\Delta \mathbf{Z} = \mathbf{C}_j - \mathbf{Z}_j$		7	5	0	0	

يطلق على الحل الابتدائي مصطلح " الحل الممكن الأساسي " ويوصف بالصيغة الآتية:

هذا هو الحل الممكن الأساسي بصيغة الأعمدة. $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 240 \end{pmatrix}$

المتغيرات التي يطلق عليها المتغيرات الأساسية في البرمجة الخطية هي$(S_1; S_2)$ أما المتغيرات التي لا يضمها مزيج الحل أو غير الأساسية $(X_1; X_2)$ في مثالنا يطلق عليها المتغيرات غير الأساسية.

IV. إجراءات الحل بطريقة السمبلكس:

اجراءات الحل بالطريقة المبسطة في حالة (تعظيم الربح)

يتم إيجاد الحل لنماذج البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس وفقا إلى ثلاث مراحل أساسية ومتسلسلة، ويمكن وصفها على النحو الآتي:

- المرحلة الأولى وذلك بإيجاد الحل الأساسي الممكن (الحل الأولي).
- المرحلة الثانية وذلك بتحسين الحل الأولي للحصول على الحل الأفضل.
- المرحلة الثالثة وذلك بتحسين الحل الأفضل للحصول على الحل الأمثل.

1. خطوات الحل بالطريقة المبسطة في حالة تعظيم الربح والقيود فقط من نوع أصغر من أو يساوي

- تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة العامة أو القانونية الى الصيغة القياسية وذلك:
- بإضافة متغير راكد (مهمل)(slack variable) الى دالة الهدف (Z) ومن ثم تحويل دالة الهدف (Z) الى معادلة صفرية عن طريق تحويل القيم الى الجانب الايسر وجعلها تساوي صفر.
- بإضافة متغير راكد الى قيود المشكلة (لا بد أن تكون من نوع اصغر من او يساوي) إلى الطرف الاقل من المعادلة وهو الطرف الايسر.
- تحديد عدم السلبية أي أن كافة قيم المتغيرات في المشكلة تكون موجبة أو مساوية للصفر أي أن X_j, $(si \geq 0)$ حيث j عدد المتغيرات وi عدد القيود.
- تنظيم جدول الحل الأساسي الممكن أو الابتدائيبالاعتماد على جميع معاملات المتغيرات X_j , S_i في قيود النموذج ودالة الهدف.
- تحديد المتغير الداخل وعلى أساس أكبر قيمة بإشارة سالبة في صف دالة الهدف (Z) .
- العمود الذي يوجد فيه المتغير الداخل يسمى بالعمود المحوري.

- تحديد المتغير الخارج عن طريق قسمة القيم الموجودة في الجهة اليمنى في عمود على ما يقابلها من قيم المعاملات في العمود المحوري، والمتغير الذي يقابل أقل قيمة موجبة (وتهمل القيم غير المعرفة والسالبة) من خوارج القسمة يعد هو المتغير الخارج، ليحل المتغير الداخل محله في الجدول لاحقا.
- الصف الذي يوجد فيه المتغير الخارج يسمى بالصف المحوري. أما العنصر الذي يقع تحت المتغير الداخل، وأمام المتغير الخارج فيسمى بالعنصر المحوري أو نقطة الارتكاز وهو العنصر الناتج من نقاطع عمود المتغير الداخل مع صف المتغير الخارج .
- يمكن الحصول على المعادلة المحورية أو الممهدة من خلال قسمة القيم في صف المتغير الخارج على العنصر المحوري وهي تمثل قيم المتغير الداخل الجديدة لغرض تحسين الحل الممكن أي بناء جدول آخر
- يتم وضع المعادلة المحورية أو الممهدة في الجدول الجديد للحل في الموقع نفسه حيث يخرج منه المتغير الخارج ليحل محله المتغير الداخل.
- يتم إيجاد معاملات دالة الهدف الجديدة (New z) وكالآتي :

معاملات (z) الجديدة = معاملات (z) القديمة - معامل المتغير الداخل في صف دالة الهدف X المعادلة المحورية

بمعنى ضرب العنصر المقابل لدالة الهدف في عمود المحور (تحت العنصر الداخل) في المعادلة المحورية وطرح النتيجة مع قيم دالة الهدف في الجدول القديم لتوضع في الجدول الجديد.

a) يتم إيجاد معاملات القيود الجديدة للمتغيرات Si وكالآتي:

معاملات (Si) الجديدة = معاملات (S_i) القديمة - معامل المتغير الداخل في صف S_i X المعادلة المحورية

بمعنى أخذ المعامل تحت المتغير الداخل للقيد بعكس إشارته وضربه بالمعادلة الممهدة ومن ثم جمعه مع القيم العائدة له في الجدول وتوضح في الجدول الجديد. وهكذا مع بقية القيود الأخرى.

- يتم الوصول للحل الامثل عندما تكون جميع معاملات دالة الهدف الجديدة في جدول الحل أكبر أو تساوي صفر.أما اذا كانت قيمة واحدة على الأقل في دالة الهدف سالبة فهذا يعني عدم التوصل الى الحل الأمثل.
- يعاد إجراء الخطوات السابقة نفسها بدءا من تحديد العنصر الداخل والخارج والمعادلة المحورية حتى تصبح جميع معاملات دالة الهدف أكبر أو تساوي صفر.

2. شكل جدول الحل

	الثوابت R.H.S	متغيرات غير أساسية					Z	Non- Basic var BasicVar.
		S3	S2	S1	X2	X1		
								Z
								S1
								S2
								S3

3. مثال توضيحي للحل بطريقة السمبلكس:

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي :

$$Max(Z) = 30X_1 + 18X_2$$

$$S/C \left| \begin{array}{l} X_1 + 2X_2 \leq 200 \\ 3X_1 + 2X_2 \leq 240 \\ X_1 \leq 150 \\ X_1; X_2; \geq 0 \end{array} \right.$$

الحل:

أ) تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة العامة أو القانونية الى الصيغة القياسية وذلك:

- بإضافة متغير راكد بمعاملات صفرية الى دالة الهدف (Z) ومن ثم تحويل دالة الهدف (Z) الى معادلة صفرية عن طريق تحويل القيم الى الجانب الايسر وجعلها تساوي صفر.
- بإضافة متغير راكد الى قيود المشكلة (لا بد أن تكون من نوع اصغر من او يساوي) إلى الطرف الاقل من المعادلة و هو الطرف الايسر.

$$Max(Z) = 30X_1 + 18X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$S/C \left| \begin{array}{l} X_1 + 2X_2 + S_1 \leq 200 \\ 3X_1 + 2X_2 + S_2 \leq 240 \\ X_1 + S_3 \leq 150 \\ X_1; X_2; S_1; S_2; S_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

- نحول دالة الهدف الى دالة صفرية عن طريق نقل كافة المتغيرات من الطرف الايمن الى الطرف الايسر من المعادلة كما يلي:

$$Max: (Z) - 30X_1 - 18X_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3$$

- نقوم بإعداد جدول الحل الابتدائي والذي سيضم المتغيرات الاساسية والغير اساسية في معادلة دالة الهدف.

ب) اعداد جدول الحل الابتدائي

Non- Basic var. / BasicVar.	Z	متغيرات غير أساسية X1	X2	S1	S2	S3	الثوابت R.H.S	
Z	1	-30	-18	0	0	0	0	
S1	0	1	2	1	0	0	200	
S2	0	3	2	0	1	0	300	
S3	0	1	0	0	0	1	150	

- اختيار المتغير الداخل وهو المتغير الذي يمثل اكبر قيمة بإشارة سالبة في صف Z ومن الجدول اعلاه يكون X1 هو المتغير الداخل لان قيمته(30-) ويطلق على العمود الذي يضم المتغير الداخل (عمود المحور).
- اختيار المتغير الخارج وهو المتغير الذي يمثل اقل قيمة موجبة من حاصل قسمة قيم الثوابت R.H.S على قيم عمود المحور، وتهمل اية قيمة سالبة او صفرية او غير محددة (∞). ويطلق على الصف الذي يضم المتغير الخارج (الصف المحوري). أما حاصل قسمة قيم R.H.S على قيم العمود المحوري فهي كالآتي :

200/1=200
300/3=100
150/1=150

اذن المتغير S2 هو المتغير الخارج لأنه يمثل اقل قيمة موجبة (100)

العنصر المحوري — المتغير الداخل — العمود المحوري — اقل قيمة موجبة

Non- Basic var. / BasicVar.	Z	متغيرات غير أساسية					الثوابت	
		X1	X2	S1	S2	S3	R.H.S	
Z	1	-30	-18	0	0	0	0	
S1	0	1	2	1	0	0	200	200
S2	0	3	2	0	1	0	300	100
S3	0	1	0	0	0	1	150	150

المتغير الخارج — الصف المحوري

ت)إيجاد القيم الجديدة لمعاملات المتغيرات

ايجاد قيم المتغير الداخل X_1 وذلك عن طريق قسمة كل قيمة في صف المحور على العنصر المحوري. العنصر المحوري هو نقطة تقاطع عمود المحور مع صف المحور، وهو(3).

اذن قيم المتغير الداخل X_1 هي :

$$\left(X1=\frac{0}{3};\frac{3}{3};\frac{2}{3};\frac{0}{3};\frac{1}{3};\frac{0}{3};\frac{300}{3}\right) => \left(X1=0;1;\frac{2}{3};0;\frac{1}{3};0;100\right)$$

تكتب القيم الجديدة اعلاه في جدول الحل الجديد

ث)ايجاد قيم بقية المتغيرات في الجدول

لإيجاد قيم Z الجديدة، نضرب القيم المقابلة لـ Z في عمود المحوري وهي (-30) في قيم المتغير الداخل الجديدة كما يلي:

$$(-30)\left(0\,,1\,,\frac{2}{3},0\,,\frac{1}{3},0\,,100\right)=(0,-30\,,-20\,,0\,,-10\,,0\,,-3000)$$

ثم نطرح القيم الناتجة اعلاه من قيم معاملات Z القديمة في جدول الحل الابتدائي كما يلي:

$$\begin{array}{llllllll} & (1, & -30\,, & -18\,, & 0\,, & 0\,, & 0\,, &)0 \\ - & (0, & -30\,, & -20\,, & 0\,, & -10\,, & 0\,, &)-3000 \\ \hline = & (1, & 0\,, & 2\,, & 0\,, & 10\,, & 0\,, &)3000 \end{array}$$

ثم ننقل القيم الى جدول الحل الثاني.

ج) ايجاد قيم معاملات المتغيرات الجديدة

لإيجاد قيم (S_1) الجديدة، نقوم بنفس الخطوات اعلاه نضرب القيم المقابلة لـ(S_1) في عمود المحوري في قيم المتغير الداخل الجديدة كما يلي:

$$(1)\left(0\,,1\,,\frac{2}{3},0\,,\frac{1}{3},0\,,100\right) = (0,1\,,2/3\,,0\,,1/3\,,0\,,100)$$

ثم نطرح الناتج من قيم المتغير (S_1) القديمة:

$$\begin{array}{cccccccc} & (0, & 1\,, & 2\,, & 1\,, & 0\,, & 0\,, &)200 \\ - & (0, & 1\,, & 2/3\,, & 0\,, & 1/3\,, & 0\,, &)100 \\ \hline = & (0, & 0\,, & 4/3\,, & 1\,, & -1/3\,, & 0\,, &)100 \end{array}$$

ثم ننقل القيم الى جدول الحل الثاني.

ح) ايجاد قيم المتغيرات الجديدة

بنفس الطريقة نبحث عن قيم المتغير (S_3)

$$\mathbf{(1)\left(0\,,1\,,\frac{2}{3},0\,,\frac{1}{3},0\,,100\right) = (0,1\,,2/3\,,0\,,1/3\,,0\,,100)}$$

ثم نطرح الناتج من قيم المتغير (S_3) القديمة:

$$\begin{array}{cccccccc} & \mathbf{(0,} & \mathbf{1\,,} & \mathbf{0\,,} & \mathbf{0\,,} & \mathbf{0\,,} & \mathbf{1\,,} & \mathbf{)150} \\ - & \mathbf{(0,} & \mathbf{1\,,} & \mathbf{2/3\,,} & \mathbf{0\,,} & \mathbf{1/3\,,} & \mathbf{0\,,} & \mathbf{)100} \\ \hline = & \mathbf{(0,} & \mathbf{0\,,} & \mathbf{-2/3\,,} & \mathbf{0\,,} & \mathbf{-1/3\,,} & \mathbf{1\,,} & \mathbf{)50} \end{array}$$

ثم ننقل القيم الى جدول الحل الثاني.

خ) جدول الحل الثاني

Non- Basic var. / BasicVar.	Z	متغيرات غير أساسية X1	X2	S1	S2	S3	الثوابت R.H.S
Z	1	0	2	0	10	0	3000
S1	0	0	3/4	1	-1/3	0	100
X2	0	1	/32	0	/31	0	100
S3	0	0	-2/3	0	-1/3	1	50

بعد استكمال الجدول يتم التأكد من اذا ما كان الجدول يمثل جدول الحل الامثل وذلك من خلال ملاحظة القيم في صف Z، ولان دالة الهدف من نوع تعظيم، نصل للحل الامثل عندما تكون جميع القيم في صف Z موجبة او صفرية.

لذا الجدول الثاني يمثل جدول الحل الامثل لان جميع القيم في صف Z موجبة او صفرية.

هذا يعني ان الحل الامثل هو في انتاج 100 وحدة من النوع الاول $(X_1=100)$ لنتمكن من تحقيق ربح مقداره 3000 $(Z=3000)$.

المحور الخامس

طريقة (Big-M) في البرمجة الخطية

تستخدم هذه الطريقة في حالة التقليل عندما تكون القيود "أكبر من أو تساوي" وفي حالة التعظيم ذات القيود المختلطة.

تنطوي فكرة هذه الطريقة عند تحويل النموذج الى الصيغة القياسية على:

- طرح متغير راكد (Si) وإضافة متغير اصطناعي (Artificial Variable) الى القيود التي تحمل اشارة "أكبر من أو تساوي" واضافة متغير اصطناعي للقيود التي تحمل اشارة (=)، وأما القيود التي تحمل اشارة "أصغر من أو تساوي" فيضاف لها فقط متغيرات راكدة (Si) .
- وكذلك اضافة المتغيرات الراكدة الى معادلة دالة الهدف بمعاملات صفرية، و(+M) للمتغيرات الاصطناعية في حالة التقليل و(-M) في حالة التعظيم .

I. حل مشكلة البرمجة الخطية التالية بطريقة Big-M

مثال:

$$\text{Min}(Z) = 2X_1 + X_2$$
$$S/C \left| \begin{array}{l} X_1 + 3X_2 \geq 30 \\ 4X_1 + 2X_2 \geq 40 \\ X_1; X_2; \geq 0 \end{array} \right.$$

الخطوة (1): نحول القيود من الصيغة العامة الى الصيغة القياسية.

لان جميع القيود من نوع أكبر من او =، لذا فان عملية التحويل تتطلب طرح متغير راكد (Si) وإضافة متغير اصطناعي ويرمز له (Ai)، وكما يأتي:

$$\left| \begin{array}{l} X_1 + 3X_2 - S_1 + A_1 = 30 \\ 4X_1 + 2X_2 - S_2 + A_2 = 40 \\ X_1, X_2, S1, S2, , A1, A2 \geq 0 \end{array} \right.$$

الخطوة (2) - معالجة قيد دالة الهدف

تتم اضافة المتغيرات الراكدة الى معادلة دالة الهدف، بمعاملات صفرية و(+M) للمتغيرات الاصطناعية في حالة التقليل و(-M) في حالة التعظيم. كما يلي:

$$\text{Min. Z} = 2X_1 + X_2 - 0S_1 - 0S_2 + MA_1 + MA_2$$

الخطوة (3) يتم تحويل معادلة دالة الهدف الى معادلة صفرية، كما يلي :

$$Z - 2X_1 - X_2 + 0S_1 + 0S_2 - MA_1 - MA_2 = 0$$

الخطوة (4) اضافة القيود التي تحتوي متغيرات اضافية الى معادلة دالة الهدف

لغرض اعداد جدول الحل الابتدائي يجب اظهار جميع المتغيرات الاضافية التي تمت اضافتها الى معادلة دالة الهدف كمتغيرات اساسية، ولان معاملاتها ليست صفر ينبغي تحويل معاملاتها الى (صفر) عن طريق اضافة

القيود التي تحتوي متغيرات اضافية الى معادلة دالة الهدف بعد ضربها $+M\times$ لمشكلات التقليل و$-M$ لمشكلات التعظيم.

$$+M\times\{X_1+3X_2-S_1+A_1=30\}\rightarrow MX_1+3MX_2-MS_1+MA_1=30M$$
$$+M\times\{X_1+3X_2-S_2+A_2=30\}\rightarrow MX_1+3MX_2-MS_2+MA_2=40M$$

اضافة القيود اعلاه الى معادلة دالة الهدف

$$Z-2X_1-X_2+0S_1+0S_2-MA_1-MA_2=0$$
$$MX_1+3MX_2-MS_1+MA_1=30M$$
$$4MX_1+2MX_2-\ MS_2+\ MA_2=40M$$
$$Z+(-2+5M)X_1+(-1+5M)X_2-MS_1-MS_2+0A_1+0A_2=70M$$

الخطوة (5) يتم اعداد جدول الحل الابتدائي، كما في العرض التالي:

BV	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	RHS	%
Z	1	-2+5M	-1+5M	-M	-M	0	0	70M	
A_1	0	1/3	3	-1	0	1	0	10	10
A_2	0	10/3	2	0	-1	0	1	20	20

اختيار المتغير الداخل وهو المتغير الذي يمثل أكبر قيمة بإشارة موجبة في صف Z ومن الجدول اعلاه يكون X_2 هو المتغير الداخل لان قيمته (-1+5M) ويطلق على العمود الذي يضم المتغير الداخل (عمود المحور).

- ايجاد قيم المتغير الداخل X_2 وذلك عن طريق قسمة كل قيمة في صف المحور على العنصر المحوري.
- العنصر المحوري هو نقطة تقاطع عمود المحور مع صف المحور، وهو (3).
- اذن قيم المتغير الداخل X2 هي:

$$X_2=\left(\frac{0}{3},\frac{1}{3},\frac{3}{3},-\frac{1}{3},\frac{0}{3},\frac{1}{3},\frac{0}{3},\frac{30}{3}\right)=\left(0,\frac{1}{3},1,-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},0,10\right)$$

لإيجاد قيمة Z الجديدة، نطرح حاصل ضرب القيمة المقابلة لـ Z في عمود المحور وهي (-1+5M) × قيم المتغير الداخل الجديدة (المعادلة المحورية) من قيم Z في جدول الحل الاولي وكما يأتي:

تكتب القيم الجديدة اعلاه في جدول الحل الجديد كما يلي:

$$Z=(1,-2+5M,-1+5M,-M,-M,0,0,70M\ )$$
$$-(-1+5M)x(0,1/3,1,-1/3,0,1/3,0,10)$$
$$=(1,-5/3+10/3M,0,-1/3+2/3M,-M,1/3-5/3M,0,10+20M)$$

$$(A2)=(0,4,2,0,-1,0,1,40)$$
$$-2X\ (0,1/3,1,-1/3,0,1/3\ ,0,10)$$
$$=(0,10/3,0,2/3,-1,-2$$
$$/3,1,20\ )$$

نقوم بوضع النتائج في جدول الحل ثاني، كالآتي:

جدول الحل الثاني

BV	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	RHS	%
Z	1	-5/3+10/3M	0	-1/3+2/3M	-M	1/3-5/3M	0	10+20M	
X_2	0	1/3	1	-1/3	0	1/3	0	10	30
A_2	0	10/3	0	2/3	-1	-2/3	1	20	6

المتغير الداخل هو X_1 لكونه يقابل أكبر قيمة ممكنة -5/3+10/3M في صف دالة الهدف Z

المتغير الخارج هو A_2 لكونه يقابل اقل قيمة موجبة في الصف المحوري

العنصر المحوري إذا هو 10/3

ومنه تكون المعادلة المحورية كالتالي:

$$X_1 = \left(0, 1,0, -\frac{1}{5}, -\frac{3}{10}, -\frac{1}{5}, \frac{3}{10}, 6\right)$$

نقوم بإيجاد قيمة Z وX_2 الجديدتين كالتالي:

$$Z = \left(1, -\frac{5}{3} + \frac{10}{3M}, 0, -\frac{1}{3} + \frac{2}{3M}, \frac{1}{3} - \frac{5}{3M}, 0,10 + 20M\right)$$
$$-\left(-\frac{5}{3} + \frac{10}{3M}\right)\left(0,1,0, \frac{1}{5}, -\frac{3}{10}, -\frac{1}{5}, \frac{3}{10}, 6\right)$$
$$= \left(1,0,0,0, -\frac{1}{2}, -M, \frac{1}{2}M, 20\right)$$

$$Z = \left(0, \frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0,10\right)$$
$$-\left(\frac{1}{3}\right)\left(0,1,0, \frac{1}{5}, -\frac{3}{10}, -\frac{1}{5}, \frac{3}{10}, 6\right)$$
$$= \left(0,0,1, -\frac{2}{5}, \frac{1}{10}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{10}, 8\right)$$

جدول الحل النهائي:

BV	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	RHS
Z	1	0	0	0	-1/2	-M	1/2-M	20
X_2	0	0	1	-2/5	1/10	2/5	-1/10	8
X_1	0	1	0	1/5	-3/10	-1/5	3/10	6

وبما ان جميع معاملات دالة الهدف (z) اقل او تساوي الصفر، عليه فان الحل الامثل للمشكلة، يكون:

$X_1 = 6,\ X_2 = 8,\ Zmax. = 20$

II. الحالات الخاصة في طريقة السمبلكس

1. تعددية الحلول المثلى

وتحدث عندما يكون بالإمكان تكوين أكثر من حل اساسي ويعطي نفس قيمة الحل الامثل، ويمكن تحديدها عندما تكون قيمة أحد المتغيرات الغير أساسية في جدول الحل الامثل في صف Z = صفر.

مثال:

$$Max(Z) = 8X_1 + 4X_2$$

$$S/C \left| \begin{array}{l} 4X_1 + 2X_2 \leq 8 \\ 2X_1 + 2X_2 \leq 6 \\ X_1; X_2; \geq 0 \end{array} \right.$$

الحل:

أ) تحويل القيود

$$S/C \left| \begin{array}{l} 4X_1 + 2X_2 + S_1 = 8 \\ 2X_1 + 2X_2 + S_2 = 6 \\ X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

ب) اضافة المتغيرات الى معادلة دالة الهدف

$$Max(Z) = 8X_1 + 4X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

ت) تحويل معادلة دالة الهدف الى معادلة صفرية

$$Z - 8X_1 - 6X_2 - 0S_1 - 0S_2 = 0$$

ث) اعداد جدول الحل الابتدائي

BV	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	1	-8	-6	0	0	0
S_1	0	4	2	1	0	8
S_2	0	2	2	0	1	6

ج) ايجاد الحلول

- تحديد المتغيرين الداخل والخارج
- المتغير الداخل هو(X_1) لأنه يمثل أكبر قيمة بإشارة سالبة
- المتغير الخارج هو (S_1) لأنه يمثل اقل قيمة موجبة في صف Z.
- ايجاد قيمة المتغير الداخل

X_1= (0/4,4/4,2/4,1/4,0/4,8/4)= (0,1,½,¼,0,2)

ح) اعداد جدول الحل الثاني

BV	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	1	0	0	2	0	16
X_1	0	1	1/2	1/4	0	2
S_2	0	0	1	-1/2	1	2

خ) الحل الامثل

- الجدول السابق يمثل جدول الحل الامثل، لان جميع القيم في صف Z موجبة او صفرية.

- الحل الامثل $X_1=2$, $X_2=0$, $Z=16$
- لكن هذا الجدول يشير الى حالة خاصة من حالات السمبلكس وهي تعددية الحلول المثلى. حيث يمكن تكوين حل امثل اخر عن طريق ادخال X_2 كمتغير اساس (داخل) من جدول الحل الاساسي لان معامله صفر في صف Z في جدول الحل النهائي ونحصل على حل اخر هو :

$X_1=1$, $X_2=2$, $Z=16$

2. حالة الانحلال (دوران الحل)

تحدث عندما تكون قيمة واحد او اكثر من متغيرات الحل الاساسي =صفر ويستدل عليها بطريقة السمبلكس عندما يتساوى ناتج قسمة (R.H.S.) على قيم عمود المحور لأكثر من متغير .

مثال:

$$\mathrm{Max}(Z) = 5X_1 + 9X_2$$
$$S/C \left| \begin{array}{l} X_1 + 2X_2 \leq 4 \\ X_1 + X_2 \leq 2 \end{array} \right.$$
$$X_1; X_2; \geq 0$$

الحل:

أ) تحويل القيود من الصيغة العامة الى الصيغة القياسية:

$$S/C \left| \begin{array}{l} X_1 + 2X_2 + \mathbf{S_1} = 4 \\ X_1 + X_2 + \mathbf{S_2} = 2 \end{array} \right.$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

ب) اضافة المتغيرات الى معادلة دالة الهدف:

$$\mathrm{Max}(Z) = 5X_1 + 9X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

ت) تحويل دالة الهدف الى دالة صفرية:

$$Z - 5X_1 - 9X_2 - 0S_1 - 0S_2 = 0$$

ث) اعداد جدول الحل الابتدائي:

BV	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	1	-5	-9	0	0	0
S_1	0	1	2	1	0	4
S_2	0	1	1	0	1	2

لمباشرة عملية الحل نقوم بتحديد المتغير الداخل والمتغير الخارج من الاساس ونجد ان :

- المتغير الداخل للأساس هو أحد متغيرات خارج الاساس الذي يمثل أكبر قيمة بإشارة سالبة في السطر Z في جدول الحل الابتدائي وهو المتغيرX_2
- المتغير الخارج من الاساس هو أحد متغيرات داخل الاساس الذي يقابل اقل قيمة موجبة في عمود النسب في جدول الحل الابتدائي ونجد هنا قيمتان متساويتان في جدول الحل الابتدائي لكل من المتغيرين الاساسيين S_1,S_2. ومنه نكون في حالة خاصة من حالات السمبلكس وهي حالة الانحلال.

3. الحلول غير المحدودة:

تحدث عندما تكون قيم عمود النسب سالبة او صفرية او غير محددة حيث يتعذر الوصول للحل الامثل.

مثال :

$$\text{Max}(Z) = 4X_1 + 2X_2$$

$$S/C \left| \begin{array}{l} 3X_1 - 3X_2 \leq 60 \\ 2X_1 - 2X_2 \leq 20 \\ X_1; X_2; \geq 0 \end{array} \right.$$

الحل:

أ. تحويل القيود :

$$S/C \left| \begin{array}{l} 3X_1 - 3X_2 + S_1 = 60 \\ 2X_1 - 2X_2 + S_2 = 20 \\ X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

ب. اضافة المتغيرات الى معادلة دالة الهدف:

$$Z = 4X_1 + 2X_2 + 0\mathbf{S_1} + 0\mathbf{S_2}$$

ت. تحويل المعادلة الى معادلة صفرية:

$$Z - 4X_1 - 2X_2 - 0S_1 - 0S_2 = 0$$

ث. اعداد جدول الحل الابتدائي:

BV	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS	%
Z	1	-4	-2	0	0	0	
S_1	0	3	-3	1	0	60	20
S_2	0	2	-2	0	1	20	10

لمباشرة عملية الحل نقوم بتحديد المتغير الداخل والمتغير الخارج من الاساس ونجد ان :

- المتغير الداخل للأساس هو احد متغيرات خارج الاساس الذي يمثل أكبر قيمة بإشارة سالبة في السطر Z في جدول الحل الابتدائي وهو المتغير X_1
- المتغير الخارج من الاساس هو احد متغيرات داخل الاساس الذي يقابل اقل قيمة موجبة في عمود النسب في جدول الحل الابتدائي و هو المتغير S_2 .

ايجاد قيم صف المتغير الداخل X_1

X_1= (0/2, 2/2, -2/2, 0/2, ½,20/2) = (0,1, -1, 0, ½,10)

ج. اعداد جدول الحل الثاني:

BV	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
Z	1	0	-6	0	2	40
S_1	0	0	0	1	-3/2	30
X_1	0	1	-1	0	1/2	10

ح. **الحل الأمثل:**

من خلال جدول الحل الثاني نلاحظ اننا لم نصل للحل الامثل بعد لأنه لا تزال هناك قيم سالبة في صف Z. لذا نكمل الحل باختيار متغير داخل جديد وهو X_2 لأنه يمثل أكبر قيمة بإشارة سالبة.

اما المتغير الخارج فصعب تحديده لعدم وجود قيم موجبة من حاصل قسمة .R.H.S على قيم عمود المحور. اذن هذه حالة خاصة من حالات السمبلكس وهي (حلول غير محدودة)

4. عدم وجود حلول ممكنة

في حالة ضهور المتغيرات الاصطناعية (Ai) في جدول الحل الامثل، يعني ذلك ان الحل لا يمكن تطبيقه.

مثال:

$$\text{Max}(Z) = 10X_1 + 15X_2$$
$$S/C \left| \begin{array}{l} X_1 + X_2 \leq 20 \\ X_1 + X_2 \geq 30 \end{array} \right.$$
$$X_1; X_2; \geq 0$$

الحل:

أ. **تحويل القيود:**

$$S/C \left| \begin{array}{l} X_1 + X_2 + S_1 = 20 \\ X_1 + X_2 - S_2 + A_1 = 30 \end{array} \right.$$
$$X_1; X_2; S_1, S_2, A_1 \geq 0$$

ب. **اضافة المتغيرات الى معادلة دالة الهدف:**

$$Z = 10X_1 + 15X_2 + 0\mathbf{S_1} - 0\mathbf{S_2} + MA_1$$

ت. **تحويل الدالة الى دالة صفرية:**

$$Z - 10X_1 - 15X_2 - 0S_1 + 0S_2 - MA_1 = 0$$

ث. **اضافة القيود التي تحتوي متغير اصطناعي الى معادلة دالة الهدف بعد ترجيحها بالمقدار M:**

$$Z - 10X_1 - 15X_2 - 0S_1 + 0S_2 - MA_1 = 0$$
$$MX_1 + MX_2 - MS_2 + MA_1 = 30M$$

$$Z - (M - 10)X_1 + (M - 15)X_2 - 0S_1 - MS_2 + 0A_1 = 30M$$

ج. **اعداد جدول الحل الابتدائي:**

BV	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	RHS	%
Z	1	M-10	M-15	0	-M	0	M30	
S_1	0	1	1	1	0	0	20	20
A_1	0	1	1	0	-1	1	30	30

المتغير الداخل هو X_1 كونه يمثل اكبر قيمة موجبة في صف Z في جدول الحل الابتدائي، المتغير الخارج هو S_1 كونه يمثل اقل قيمة موجبة في عمود النسب في جدول الحل الابتدائي.

X1= (0,1 , 1, 1, 0, 0, 20)

ح. جدول الحل الثاني:

$$Z = (1, M - 10, M - 15, 0, -M, 0, 30M)$$
$$-(M - 10)x(0, 1, 1, 1, 0, 0, 20)$$
$$= (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{-5}, \mathbf{-M + 10}, \mathbf{-M}, \mathbf{0}, \mathbf{10M + 200})$$

BV	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	RHS
Z	1	0	-5	-M+10	-M	0	10M+200
X_1	0	1	1	1	0	0	20
A_1	0	1	1	0	-1	1	30

وبما ان جميع معاملات (Z) اقل او تساوي صفر فهذا يعني أننا توصلنا الى الحل الامثل، ولما كان المتغير الاصطناعي A1 موجود وهذا غير مقبول ولذا لا يمكن متابعة الحل ومنه عدم الوصول الى حل ممكن.

TISSEMSILT UNIVERSITY

المحور السادس

النموذج الثنائي للبرمجة الخطية

لكل مشكلة برمجة خطية هناك مشكلة أخرى مرتبطة بها، نسمي إحدى هاتين المشكلتين بالمشكلة الأولية والأخرى نسميها النموذج المقابل وتمتلك كلتا المشكلتين خواص مرتبطة مع الخواص الأخرى، فمثلاً الحل الأمثل لإحدى هاتان المشكلتان يعطي معلومات كاملة عن الحل الأمثل للأخرى.

أي أن لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية هناك نموذج مقابل ومشتق منه، فإذا كان النموذج الأولى يتعلق بتعظيم دالة الهدف فإن النموذج المقابل له سيكون تدنئة دالة الهدف وتصاغ عادة من نفس البيانات التي يتضمنها النموذج الأول والعكس بالعكس.

إن اللجوء إلى استخدام النموذج المقابل يتضمن فوائد متعددة منها سهولة التوصل إلى تحقيق الحل الأمثل لمشاكل البرمجة الخطية وسرعته عندما يصعب حل النموذج الأولي، لذلك سيتم التطرق في هذا الفصل إلى بعض القواعد الرياضية لتحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل وبالعكس، كذلك صياغة وايجاد الحل للمشكلة المقابلة والتي نلاحظ بأن طريقة الحل لا تختلف كثيراً عن الحل بأسلوب الطريقة البسيطة للنموذج الأولي.

I. مميزات النموذج المقابل) الثنائي:

من مميزات النموذج المقابل الآتي:

أ. يساعد النموذج المقابل على التوصل إلى الحل بصورة أسرع في بعض الأحيان وذلك بتقليص خطوات الحل، أي أن طريقة حل المشكلة المقابلة تستلزم خطوات رياضية اقل تعقيد من الخطوات اللازمة لحل المشكلة الأولية أحياناً؛

ب. للتخلص من الإشارة السالبة في الجانب الأيمن (أن وجدت) أي عندما تكون المصادر ذات كميات سالبة وهو أهم ما يمكن الحصول عليه في حالة التحويل إلى النموذج الثنائي؛

ت. لغرض التعرف على ابعاد المشكلة الأخرى (المشكلة البديلة) فإذا كان النموذج الأولي وبصيغة (Max)أي المشكلة بالصيغة الربحية، فبإمكاننا التعرف على النموذج الثنائي ويكون بصيغة (Min)وتمثيله للجانب الكلفوي (في نفس المشكلة)، ولنفس المشكلة المعبر عنها أولا بالصيغة الأولية

ث. يعطي النموذج الثنائي (المقابل) كثير من الحقائق الإقتصادية التي تساعد على تفهم أبعاد المشكلة وبخاصة فيما يتعلق بأسعار الظل؛

ج. يعيد النموذج الثنائي أثر التغيرات في معاملات دالة الهدف وثوابت الطرف الأيمن ومعرفة المجال الذي تتحقق فيه نتائج الحل الأمثل؛

ح. بالإمكان إضافة قيود جديدة للمشكلة وايجاد حل أمثل لها وفقاً للقيود المضافة، ومنها نستنتج أن لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية نموذجاً مقابلاً، كما لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية نموذجاً أوليا

II. خطوات تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل أو الثنائي:

لغرض تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل وبالعكس يمكن ذلك باتباع الخطوات الآتية:

أ. نعكس صيغة دالة الهدف، فإذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي بصيغة تدنئة فإننا نعكسها ونجعلها للنموذج المقابل بصيغة تعظيم والعكس بالعكس؛

ب. استبدال المتغيرات المشار إليها بالرمز (X) في النموذج الأولي إلى متغيرات مشار لها بالرمز (Y) في النموذج المقابل وتحويل رمز دالة الهدف من (Z) في النموذج الأولي إلىW) (في النموذج المقابل؛

ت. جعل القيم التي تقع في الجهة اليمنى من قيود النموذج الأولي (ثوابت القيود) معاملات للمتغيرات الجديدة في دالة هدف النموذج المقابل؛

ث. جعل معاملات متغيرات دالة هدف النموذج الأولي، الطرف الأيمن للقيود الجديدة للنموذج المقابل؛

ج. تحويل مصفوفة المعاملات للمتغيرات في القيود النموذج الأولي بحيث تصبح الصفوف أعمدة والأعمدة صفوف (إيجاد منقول مصفوفة معاملات المتغيرات) ؛

ح. إضافة شرط عدم السلبية على المتغيرات الجديدة؛

خ. تغير إشارة القيود من ($\leq$) إلى ($\geq$) أو العكس.

ملاحظة:

- إذا كان عدد متغيرات النموذج الأولي تساوي(N) وعدد القيود (M) فإن عدد متغيرات النموذج المقابل تساوي(M) وعدد القيود(N) ؛
- عند التحويل من النموذج الأولي إلى نموذج مقابل يجب مراعاة ما يلي:
- إذا كانت دالة الهدف (Max) فيجب أن تكون القيود كلها أقل من أو يساوي($\leq$) ؛
- إذا كانت دالة الهدف(Min) فيجب أن تكون القيود كلها أكبر من أو يساوي($\geq$)؛
- إذا لم تتحقق هذه الشروط فيجب تحقيقها في الأمثلة.

III. صياغة المشكلة المقابلة (الثنائية):

هناك صيغتين للبرامج الخطية، الصيغة القانونية والصيغة المختلطة سوف نحاول توضيح كيفية إيجاد الصيغة المقابلة لكل منهما.

1. ثنائية الصيغ القانونية:

إذا كان البرنامج الأولي بالشكل المصفوفي في صيغته القانونية التالية:

$$Max(Z) = C^t X$$
$$S/C \left| \begin{array}{l} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{array} \right.$$

فإن برنامجه الثنائي يكتب كما يلي:

$$Max(Z) = B^t X$$
$$S/C \left| \begin{array}{l} AY \geq B \\ Y \geq 0 \end{array} \right.$$

مثال رقم (1) : أوجد النموذج المقابل لمشكلة البرمجة الخطية الآتية:

النموذج الأولي	النموذج الثنائي
$Max(z)=5x_1+6x_2$ s/c $\begin{cases} x_1+9x_2\leq 60 \\ 2x_1+3x_2\leq 45 \\ 5x_1-2x_2\leq 20 \\ x_2\leq 30 \end{cases}$ $x_1;x_2\geq 0$	$Min(W)=60y_1+45y_2+20y_3+30y_4$ s/c $\begin{cases} y_1+2y_2+5y_3\geq 5 \\ 9y_1+3y_2-2y_3+y_4\geq 6 \end{cases}$ $y_1;y_2;y_3;y_4\geq 0$

يلاحظ أن مصفوفة أمثال القيود في المشكلة الأولية هي منقول مصفوفة أمثال القيود النموذج المقابل، ويلاحظ في هذا المثال، أن عدد القيود في النموذج المقابل أقل منها في المشكلة الأولية. بما أن الحل الأمثل لإحدى المشكلتين يمكن الحصول عليه من الحل الأمثل للمشكلة الأخرى، فإنه سيكون من الأسهل حل النموذج المقابل في هذه الحالة، وذلك لأن الصعوبات الحسابية في حل مشكلة البرمجة الخطية التي تأتي من كثرة القيود أكثر من تلك التي تأتي من كثرة المتغيرات، وهذا يعطي إحدى فوائد دراسة المشاكل المقابلة.

مثال رقم (2) : حول نموذج البرمجة الخطية لآتي إلى النموذج الثنائي :

النموذج الأولي	النموذج الثنائي
$\mathrm{Max}(Z) = 5X_1 + 2X_2 + X_3$ $S/C \begin{cases} 2X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 20 \\ 6X_1 + 8X_2 + 5X_3 \geq 30 \\ 7X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 40 \\ X_1 + 2X_2 + 4X_3 \geq 50 \end{cases}$ $X_1; X_2; X_3 \geq 0$	$\mathrm{Max}(Z) = 20Y_1 + 30Y_2 + 40Y_3 + 50Y_4$ $S/C \begin{cases} 2Y_1 + 6Y_2 + 7Y_3 + Y_4 \leq 5 \\ 3Y_1 + 8Y_2 + Y_3 + 2Y_4 \leq 2 \\ Y_1 + Y_2 + 3Y_3 + 4Y_4 \leq 6 \end{cases}$ $Y_1; Y_2; Y_3; Y_4 \geq 0$

2. **ثنائية الصيغ المختلطة** :

وهي الصيغة تكون فيها المتراجحات ($\leq; \geq$) وتوجد معادلة بصيغة مساواة وكل منها معاملة خاصة كالآتي: في حالة وجود قيد بإشارة يساوي (=) في النموذج الأولي، يتم تحويل هذا القيد إلى قيدين بإشارتين مختلفتين أحدهما بإشارة أقل من أو يساوي، والآخر بإشارة أكبر من أو يساوي، وفي حال كانت دالة الهدف في النموذج الأولي تعظيم(Max) نقوم بتحويل القيد الذي إشارته أكبر من أو يساوي إلى القيد أقل من أو يساوي عن طريق ضرب القيد الأكبر أو يساوي في (-1)، وفي حال كانت دالة الهدف في النموذج الأولي تخفيض (Min)نقوم بتحويل القيد الذي إشارته أقل من أو يساوي إلى قيد إشارته أكبر من أو يساوي عن طريق ضرب القيد الأقل أو يساوي في (-1)، وعلى أية حال يجب أن تكون إشارات قيود النموذج الأولي متماثلة قبل تحويله إلى النموذج المقابل.

مثال رقم (3) : حول النموذج الأولي الآتي إلى النموذج المقابل :

$$\mathrm{Max}(Z) = X_1 + X_2 - X_3 - X_4$$
$$S/C \begin{cases} 3X_1 - 2X_2 + X_3 + 5X_4 \leq 18 \\ 5X_1 + 6X_2 \leq 20 \\ X_1 - X_2 + 4X_3 + X_4 \geq 9 \end{cases}$$
$$X_1; X_2; X_3; X_4 \geq 0$$

الحل : نحول القيد الثالث إلى الشكل أقل من أو يساوي ويتم ذلك بضرب القيد الثالث بـ (-1). فيصبح القيد:

$$X_1 - X_2 + 4X_3 + X_4 \geq 9 \;=>\; (-1)(X_1 - X_2 + 4X_3 + X_4)$$
$$-X_1 + X_2 - 4X_3 - X_4 \geq -9$$

ويكون النموذج بشكله النهائي كالتالي:

$$\mathrm{Max}(Z) = X_1 + X_2 - X_3 - X_4$$
$$S/C \begin{cases} 3X_1 - 2X_2 + X_3 + 5X_4 \leq 18 \\ 5X_1 + 6X_2 \leq 20 \\ -X_1 + X_2 - 4X_3 - X_4 \leq -9 \end{cases}$$
$$X_1; X_2; X_3; X_4 \geq 0$$

وسيكون النموذج المقابل كما يلي:

$$\mathrm{Max}(W) = 18Y_1 + 20Y_2 - 9Y_3$$
$$\begin{cases} 3Y_1 + 5Y_2 + Y_3 \geq 1 \\ -2Y_1 + Y_3 \geq 1 \\ Y_1 + 6Y_2 - 4Y_3 \geq -1 \\ 5Y_1 - Y_3 \geq -1 \end{cases}$$
$$Y_1; Y_2; Y_3 \geq 0$$

مثال رقم (4) : حول النموذج الأولي التالي إلى النموذج المقابل:

$$\mathrm{Max}(Z) = 2X_1 - X_2$$
$$S/C \begin{cases} X_1 + 3X_2 = 7 \\ X_1 - X_2 = 3 \end{cases}$$
$$X_1; X_2 \geq 0$$

الحل:
لمعالجة القيود عندما تكون في حالة المساواة، يجب أولاً تعبير عن كل قيد مساواة بقيدين أحدهما أكبر أو يساوي والأخر أقل أو يساوي، وبعد ذلك تعديل جميع القيود أن تكون من نوع واحد أي أقل من أو يساوي ليتلائم مع دالة الهدف تعظيم وذلك بضرب بـ(-1)

المرحلة الأولي

$$\mathbf{Max}(Z) = \mathbf{2X_1 - X_2}$$
$$S/C \left| \begin{array}{l} \mathbf{X_1 + 3X_2 \leq 7} \\ \mathbf{X_1 + 3X_2 \geq 7} \\ \mathbf{X_1 - X_2 \leq 3} \\ \mathbf{X_1 - 2X_2 \geq 3} \end{array} \right.$$
$$\mathbf{X_1; X_2 \geq 0}$$

المرحلة الثانية

$$\mathbf{Max}(Z) = \mathbf{2X_1 - X_2}$$
$$S/C \left| \begin{array}{l} \mathbf{X_1 + 3X_2 \leq 7} \\ \mathbf{-X_1 - 3X_2 \leq -7} \\ \mathbf{X_1 - X_2 \leq 3} \\ \mathbf{-X_1 + 2X_2 \leq -3} \end{array} \right.$$
$$\mathbf{X_1; X_2 \geq 0}$$

ومن البرنامج المقابل كما يلي:

$$\mathrm{Max}(W) = 7Y_1 - 7Y_2 + 3Y_3 - 3Y_4$$
$$\left| \begin{array}{l} Y_1 - Y_2 + Y_3 - Y_4 \geq 2 \\ 3Y_1 - 3Y_2 - Y_3 + Y_4 \geq -1 \end{array} \right.$$
$$Y_1; Y_2; Y_3; Y_4 \geq 0$$

IV. العلاقة بين حل النموذجين الأولي والثنائي :

- القيم المقابلة للمتغيرات الوهمية والتي تظهر في السطر الأخير تساوي قيم المتغيرات الرئيسية على وجه الترتيب للبرنامج الثنائي وبالقيمة المطلقة؛
- وقيم المتغيرات الوهمية في البرنامج الثنائي التي تظهر في السطر الأخير تساوي على وجه الترتيب قيم المتغيرات الرئيسية في البرنامج الأولي؛
- قيم المتغيرات الحقيقية في البرنامج الأولي والتي تظهر في عمود الثوابت، تساوي القيم المقابلة للمتغيرات الوهمية للبرنامج الثنائي والتي تظهر في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل، وقيم المتغيرات الحقيقية للبرنامج الثنائي والتي تظهر في عمود الثوابت، تساوي القيم المقابلة للمتغيرات الوهمية للبرنامج الأولي والتي تظهر في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل (بالقيمة المطلقة)؛
- قيمة الدالة الإقتصادية في الحل الأمثل للبرنامجين تكون متساوية، وفي كلا الحالتين تأخذ قيمتها المطلقة.

مثال رقم (5): من البرنامج الخطي التالي:
أوجد البرنامج الثنائي للبرنامج الأولي ثم أوجد الحل الأمثل للبرنامج الأولي ثم البرنامج الثنائي، وقارن نتائج الحل في البرنامجين، وماذا تستنتج؟

$\mathrm{Max}(Z) = 12X_1 + 48X_2$	
S/C	$X_1 + 2X_2 \leq 10$
	$3X_1 + 3X_2 \leq 24$
	$-4X_1 \leq -8$
	$X_1; X_2 \geq 0$

الحل:

1. البرنامج المقابل يكتب كما يلي:

$$\mathrm{Max}(W) = 10Y_1 + 24Y_2 - 8Y_3$$
$$\left| \begin{array}{l} Y_1 + 3Y_2 - 4Y_3 \geq 12 \\ 2Y_1 + 3Y_2 \geq 48 \end{array} \right.$$
$$Y_1; Y_2; Y_3 \geq 0$$

2. وعند حل النموذجين (الأول والثاني) أعلاه وبطريقة السمبلكس، سوف نبين الجداول النهائية، أي جداول الحل الأمثل للنموذجين وبيان العلاقة بين الحلين في قيم المتغيرات الأولية والبديلة الثنائية

جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي:

XB	X1	X2	S1	S2	S3	B
X2	0	1	1/2	0	1/8	4
S2	0	1	-3/2	1	3/8	6
X1	1	1	0	0	-1/4	2
$\Delta Z = C_j - Z_j$	0	0	24	0	3	$Z = 216$

جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي:

YB	Y1	Y2	Y3	S1	S2	B
Y1	1	3/2	0	0	-1/2	24
Y3	0	-3/8	1	1/4	-1/8	3
$\Delta W = C_j - Z_j$	0	-6	0	-2	-4	$Z = 216$

المقارنة والاستنتاج: من جدول الحل الأمثل لبرنامج الحل الأولي وجدنا:
X1=2 وهي قيمة تقابل S1 بالقيمة المطلقة في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي؛
X2=4 وهي قيمة تقابل S2بالقيمة المطلقة في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي؛
S2=6 وهي قيمة تقابل Y2بالقيمة المطلقة في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي؛ بقية المتغيرات معدومة
واذا ما نظرنا على مستوى السطر الأخير للبرنامج الأولي، فإننا نجد أن:
S1 تقابلها القيمة 24 ، وهي قيمة Y1 في البرنامج الثنائي؛
S3 تقابلها القيمة 3، وهي قيمة Y3 في البرنامج الثنائي؛ بقية المتغيرات معدومة.
كما أن قيمة الدالة الإقتصادية متساوية في جدول الحل الأمثل للبرنامجين أي $W = Z - 216$.
النتيجة:
هي أن جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي يتضمن أيضا الحل الأمثل للبرنامج الثنائي، وجدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي يتضمن أيضا الحل الأمثل للبرنامج الأولي.

V. التفسير الاقتصادي العلمي للنموذج الثنائي:

سنورد في هذه الفقرة ما ينطوي عليه النموذج المقابل، أي معنى ما تذهب إليه تغيير القيود وجعل المصادر في الجانب الأيمن هم معاملات لمتغيرات دالة الهدف وتفسير تخصيص لكل قيد متغير بديل في النموذج الثنائي عن طريق سرد المثال الآتي:

مثال رقم (6):

تنتج إحدى الشركات نوعين من المنتجات X1 وX2 باستخدام ثلاثة عناصر إنتاجية هي: المواد الأولية والطاقة والعمل، فإذا كان المتاح من هذه الموارد هو 12 ، 10 ، 8 وحدة على الترتيب، ويوضح الجدول الآتي ما تحتاجه الوحدة الواحدة من كل من X1و X2من هذه الموارد وربح كل منها.

الموارد المتاحة	المنتجات X_2	X_1	المنتج / عناصر الإنتاج
8	2	1	مواد أولية
10	1	3	طاقة
12	3	4	عمل
	3	2	ربح الوحدة الواحدة

المطلوب :

1. شكل المسألة في نموذج خطي؛
2. أكتب الشكل الثنائي للبرنامج الخطي؛
3. فسر اقتصاديا النموذج الثنائي

الحل:

يكون نموذج البرمجة الخطية الخاص بالمثال والجدول السابق كما يلي:

$$\text{Max}(Z) = 2X_1 + 3X_2$$

$$S/C \left| \begin{array}{ll} X_1 + 2X_2 \leq 8 & \text{قيد المواد الاولية} \\ 3X_1 + X_2 \leq 10 & \text{قيد الطاقة} \\ 4X_1 + 3X_2 \leq 12 & \text{قيد العمل} \end{array} \right.$$

$$X_1; X_2 \geq 0$$

هذا النموذج (الأولي) يعطينا:

قيم X_1، وX_2وقيمة Z المثلى التي تجعل الربح أكبر ما يمكن والوحدات غير المستغلة من المواد S_1، S_2 وS_3

لكن هذا النموذج لا يحدد لنا الأتي:

- كلفة الوحدة الواحدة من X1 ، وX2
- الكلفة الكلية للإنتاج

لذلك سوف نلجأ إلى استخراج النموذج المقابل.

نفرض:

y1 سعر الوحدة الواحدة من المواد الأولية؛

y2: سعر الوحدة الواحدة من الطاقة؛

y3: سعر الوحدة الواحدة من العمل؛

ويكون النموذج الثنائي كما يلي:

$$\text{Max}(W) = 8Y_1 + 10Y_2 + 12Y_3$$

$$\left| \begin{array}{l} Y_1 + 3Y_2 - 4Y_3 \geq 2 \\ 2Y_1 + Y_2 + 3Y_3 \geq 3 \end{array} \right.$$

$$Y_1; Y_2; Y_3 \geq 0$$

حيث:

8y1: كلفة المواد الأولية (أي حاصل ضرب سعر الوحدة الواحدة من المواد الأولية في كمية المواد الأولية المتوفرة)؛

10y2:كلفة الطاقة (أي حاصل ضرب سعر الوحدة الواحدة من الطاقة في كمية المتوفرة من الطاقة) ؛

12y3:كلفة العمل (أي حاصل ضرب سعر الوحدة الواحدة من العمل في كمية العمالة المتوفرة)؛

والمجموع لهذه الحدود الثلاثة يمثل الكلفة الكلية ولهذا نسعى إلى تحقيق اقل كلفة للعملية الإنتاجية (دالة الهدف للنموذج المقابل من نوع تدنئة).

أما التفسير الإقتصادي لقيود النموذج الثنائي المقابل:

القيد الأول:

y_1: تمثل كلفة المواد الأولية اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوج x_1؛

$3y2$: تمثل كلفة الطاقة اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوج $x1$؛

$4y3$: تمثل كلفة العمل اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوج $x1$؛

والمجموع لهذه الحدود الثلاثة يمثل الكلفة الكلية اللازمة لتصنيع وحدة واحدة من المنتوج، x_1 القيد الأول هو كلفة إنتاج وحدة واحدة من، x_1 وأن الكلفة الكلية لتصنيع وحدة واحدة من $x1$يجب أن تساوي أو بالحد الأدنى لربح الوحدة الواحدة من المنتوج x_1 ومقداره(2).

القيد الثاني:

$2y1$: تمثل كلفة المواد الأولية اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوج $x2$؛

$y2$: تمثل كلفة الطاقة اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوج $x2$؛

$3y3$: تمثل كلفة العمل اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوج $x2$؛

والمجموع لهذه الحدود الثلاثة يمثل الكلفة الكلية اللازمة لتصنيع وحدة واحدة من المنتوج، x_2 القيد الثاني هو كلفة إنتاج وحدة واحدة من، x_2 وأن الكلفة الكلية لتصنيع وحدة واحدة من $x2$ يجب أن تساوي أو بالحد الأدنى لربح الوحدة الواحدة من المنتوج x_2 ومقداره(3)

VI. طريقة السمبلكس المقابلة (الثنائية)

إحدى الفرضيات الأساسية لحل النموذج الأولي بواسطة طريقة السمبلكس هي إن الموارد) قيم الجانب الأيمن للقيود(يجب إن تكون أكبر من الصفر، حل النموذج المقابل بواسطة طريقة السمبلكس يساعد على التخلص من هذا الشرط حيث إن قيمة الموارد ممكن إن تكون سالبة وعلى هذا الأساس فلا حاجة لإدخال المتغيرات الاصطناعية إلى النموذج.

كما توجد حالة أخرى وهو إثناء الحل بطريقة السمبلكس الاعتيادية وعند الانتقال من جدول سمبلكس إلى آخر يظهر في الجانب الأيمن الإشارة السالبة لبعض قيم المتغيرات أو جميعها، فالعلاج ما ورد في الحالتين أعلاه والحصول على الحل الأمثل وبشكل أكيد يجب إتباع طريقة السمبلكس المقابلة لتجاوز ما يظهر من عقبات مماثلة تمنع ظهور الحل الأمثل.

ولتوضيح ذلك نورد المثال التالي وفي كل مرحلة سيتم توضيح خطوات تطبيق طريقة السمبلكس المقابلة.

مثال رقم (7) : أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الأتي مستعيناً بطريقة السمبلكس المقابلة

$$\mathrm{Min}(Z) = X_1 + 4X_2 + 3X_3$$

$$S/C \left| \begin{array}{l} X_1 + 2X_2 - X_3 + X_4 \geq 3 \\ -2X_1 - X_2 + 4X_3 + X_4 \geq 2 \\ X_1; X_2; X_3; X_4 \geq 0 \end{array} \right.$$

الحل:

ولضمان عدم استخدام المتغيرات الاصطناعية من إيجاد الصيغة النموذجية للنموذج، فيتم عكس القيود من أكبر أو تساوي إلى أقل أو تساوي) بضرب القيدين في) ((-1فتصبح القيود في النموذج كما يأتي:

الصيغة النموذجية:

$$-X_1 - 2X_2 + X_3 - X_4 + \mathbf{S_1} = -3$$
$$2X_1 + X_2 - 4X_3 - X_4 + \mathbf{S_2} = -2$$
$$\text{Min}(Z) = X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 0\mathbf{S_1} + 0\mathbf{S_2}$$

وبالنظر إلى النموذج (كميات الجانب الأيمن سالبة) بالإمكان القول إن هذا النموذج يتمتع بحل غير ممكن، وفي هذه حالة استخدام طريقة السمبلكس الاعتيادية سوف نحصل على ما يسمى أمثل ولكن غير ممكن.

T1	Cj	1	4	0	3	0	0	B
CB	XB	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	
0	S1	-1	-2	1	-1	1	0	-3
0	S2	2	1	-4	-1	0	1	-2
Z_j		0	0	0	0	0	0	
$\Delta W = C_j - Z_j$		1	4	0	3	0	0	Z=0

بما أن $\Delta Z \geq 0$ وهذا ما يدل أن الحل أمثل، وبما أن الجانب الأيمن سالب كميات سالبة ولذلك يكون الحل أمثل ولكن غير ممكن ولذلك يجب إتباع طريقة السمبلكس المقابلة وتكون خطواتها كالتالي:

1.**إختيار المتغير الخارج :** وهنا يتم اختيار المتغير الأساسي والذي يملك أقل قيمة سالبة:

$$\text{Min}Z(-3;-2)$$

وفي مثالنا يكون المتغير $S_1=-3$ هو المتغير الخارج ويجب أن يغادر الحل.

2.**تحديد المتغيرة الداخلة:**

ولتحديد المتغير الداخل نختار من المتغيرات غير الأساسية:

حالة التدنئة	حالة التعظيم
$Max\left\{\frac{(C_j - Z_j)}{\mu_k}; \mu_k \langle 0\right\}$	$Min\left\{\frac{-(C_j - Z_j)}{\mu_k}; \mu_k \langle 0\right\}$

μ_k هي قيم السالبة في صف المتغير الخارج

ومن مثالنا: $Min\left\{\frac{-1}{-1}; \frac{-4}{-2}; \frac{-3}{-1}\right\} = Min(1;2;3)$

ومنه أقل نسبة تقابل المتغير غير الأساسي لـ X_1 ، إذن X_1 يحل محل S_1 بعد ذلك سوف نباشر بالعمليات الحسابية لاستخراج الجدول اللاحق للسمبلكس بطريقة الاعتيادية:

T1	Cj	1	4	0	3	0	0	B
CB	XB	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	
0	X_1	1	2	-1	1	-1	0	3
0	S2	0	3-	-2	-3	2	1	8-
Z_j		0	0	0	0	0	0	Z=0
$\Delta W = C_j - Z_j$		1	4	0	3	0	0	

لازال الجدول الثاني يتمتع بالحل الغير ممكن بالنسبة للنموذج الأولي المتغير الأساس $S_2=-8$ يملك قيمة سالبة وهو المتغير الخارج ولتحديد أي من المتغيرات غير الأساسية التي سوف تدخل والتي تحمل معاملات سالبة في صف S_2، ويتحدد من خلال النسبة:

$$Min\left\{\frac{-2}{-3};\frac{-1}{-2};\frac{-2}{-3}\right\} = Min\left(\frac{2}{3};\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$$

النسبة الأقل هي تقابل x_3، إذن المتغير x_3 هو الذي يدخل محل S_2 المتغير الخارج، والجدول الثالث يكون على النحو الأتي:

T1	Cj	1	4	0	3	0	0	B
CB	XB	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	
0	X_1	1	27/	0	25/	2-	2/1-	7
0	X_3	0	23/	1	23/	1-	2/1-	4
Z_j		1	27/	25/	25/	2/1-	2/1-	Z = 7
$\Delta W = C_j - Z_j$		0	21/	25/	21/	2/1-	2/1	

بما أن قيم صف $b>0;\ \Delta Z \geq 0$ اذن الجدول الثالث هو جدول حل أمثل ونتائج هي:

$X_1=7$; $X_2=0$; $X_3=4$; $X_4=0$; $S_1=S_2=0$; $Z=$ 7

VII. طريقة السمبلكس المعدلة:

من خلال الحل بطريقة السمبلكس نلاحظ أن الحسابات التي تم إجراؤها كانت على جميع القيم ولكل جدول من الجداول خلال الحل، واذا كانت مشكلة البرمجة الخطية تتضمن عدد كبير من المتغيرات والقيود فإن حلها تتطلب حسابات كثيرة ووقت لإجرائها

مثال رقم (8) : أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الأتي مستخدما طريقة السمبلكس المعدلة.

$$\mathrm{Min}(Z) = -3X_1 + X_2 + X_3$$

$$S/C\left|\begin{array}{l} X_1 - 2X_2 + X_3 \leq 11 \\ -4X_1 + X_2 + 2X_3 \geq 3 \\ 2X_1 - X_3 = -1 \\ X_1; X_2; X_3 \geq 0 \end{array}\right.$$

1.الصيغة النموذجية:

نضرب القيد الثالث في (1-) نجد:

$$\mathrm{Min}(Z) = -3X_1 + X_2 + X_3 + 0S_1 + 0S_2 + MA_1 + MA_2$$

$$S/C\left|\begin{array}{l} X_1 - 2X_2 + X_3 + 0S_1 = 11 \\ -4X_1 + X_2 + 2X_3 - 0S_2 + A_1 \geq 3 \\ -2X_1 + X_3 + A_2 = 1 \\ X_1; X_2; X_3; S_1; S_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

2.نضع معاملات للمتغيرات داخل القيود على شكل أعمدة وكما يلي :

$$P_1=\begin{bmatrix}1\\-4\\-2\end{bmatrix};P_2=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix};P_3=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix};P_4=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix};P_5=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix};P_6=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix};P_7=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix};b=\begin{bmatrix}11\\3\\1\end{bmatrix}$$

وبما أن المتغيرات S_1; A_1; A_2 هي متغيرات أساسية في الحل الابتدائي الأساسي الممكن ولهذا تكون مصفوفة β مكونة من أعمدتهم وكما يلي:

$$\beta=\begin{pmatrix}P_4 & P_6 & P_7\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

دائما يكون معكوس مصفوفة الوحدة هي نفسه أي: $\beta^{-1}=I$ ولاستخراج المقدر المسمى بمضروب السمبلكس والذي يرمز له بـ $\pi=C_B\beta^{-1}$

$$\pi=C_B\beta^{-1}=\begin{pmatrix}0 & M & M\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0 & M & M\end{pmatrix}$$

وتحدد قيم الصف ΔZ من العلاقة الآتية: $\overline{C}_j=C_j-\pi P_j$

فنحسب $\overline{C}_j$ الى المتغيرات الباقية والتي هي: X_1; X_2; X_3; S_2 وهذه أحدى فوائد تطبيق طريقة السمبلكس المحورة وكما يلي:

$$\overline{C}_1=C_1-\pi P_1=(-3)-\begin{pmatrix}0 & M & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-4\\-2\end{pmatrix}=-3+6M$$

$$\overline{C}_2=C_2-\pi P_2=(1)-\begin{pmatrix}0 & M & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=1-M$$

$$\overline{C}_3=C_3-\pi P_3=(1)-\begin{pmatrix}0 & M & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=1-3M$$

$$\overline{C}_{S_2}=C_{S_2}-\pi P_5=(0)-\begin{pmatrix}0 & M & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}=M$$

ومن ملاحظة $\overline{C}_j$ نستنتج أن المتغير X_3 سوف تدخل إلى الحل:

X_B	β^{-1}			b	المتغير الداخل	العمود المتغير الداخل
S_1	0	0	0	11		1
A_1	0	1	0	3	X_3	2
A_2	1	0	1	1		1

المتغيرة الخارجة A_2 والداخلة X_3 وتكون :

$$C_B = \begin{pmatrix} 0 & M & M \end{pmatrix}$$

ولذلك يكون قيم عمود b ومصفوفة β^{-1} كما يلي:

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \beta^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{b} = \beta^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ولتحديد مضروب السمبلكس في هذه المرحلة يكون كما يلي:

$$\pi = C_B \beta^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & M & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & M & -2M+1 \end{pmatrix}$$

وبما أن المتغيرات X_1; X_2; S_2 هي التي لم تدخل الحل لحد الآن فيتم حساب $\overline{C}_j$ لها فقط :

$$\overline{C}_1 = C_1 - \pi P_1 = (-3) - \begin{pmatrix} 0 & M & -2M+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = -1$$

$$\overline{C}_2 = C_2 - \pi P_2 = (1) - \begin{pmatrix} 0 & M & -2M+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 - M$$

$$\overline{C}_{S_2} = C_{S_2} - \pi P_5 = (0) - \begin{pmatrix} 0 & M & -2M+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = M$$

المتغير X_2 سوف تدخل إلى الحل :

$$\overline{P_2} = \beta^{-1}P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

X_B	β^{-1}			b	المتغير الداخل	العمود المتغير الداخل
S_1	**0**	**0**	**-1**	**10**		**-2**
A_1	**0**	**1**	**-2**	**1**	**X_2**	**1**
X_3	**1**	**0**	**1**	**1**		**0**

المتغيرة الخارجة A_1 والداخلة X_2 وتكون :

$$C_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

حساب قيم عمود b ومصفوفة β^{-1} كما يلي:

$$\beta = \begin{pmatrix} P_4 & P_2 & P_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \beta^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{b} = \beta^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ولتحديد مضروب السمبلكس في هذه المرحلة يكون كما يلي :

$$\pi = C_B\beta^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

وبما أن المتغيرات X_1; S_2 هي التي لم تدخل الحل لحد الآن فيتم حساب $\overline{C}_j$ لها فقط :

$$\overline{C_1} = C_1 - \pi P_1 = (-3) - \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = -1$$

$$\overline{C_{S_2}} = C_{S_2} - \pi P_5 = (0) - \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

المتغير X_1 سوف تدخل إلى الحل :

$$\overline{P_1}=\beta^{-1}P_1=\begin{bmatrix}1 & 2 & -5\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -4\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 0\\ -2\end{bmatrix}$$

X_B			β^{-1}	b	المتغير الداخل	العمود المتغير الداخل
S_1	0	2	-5	12		3
X_2	0	1	-2	1	X_1	0
X_3	1	0	1	1		-2

المتغيرة الخارجة S_1 والداخلة X_1 وتكون :

$$C_B=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

حساب قيم عمود b ومصفوفة β^{-1} كما يلي:

$$\beta=\begin{pmatrix}P_1 & P_2 & P_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -4 & 1 & 2\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow\beta^{-1}=\begin{bmatrix}1/3 & 2/3 & -5/3\\ 0 & 1 & -2\\ 2/3 & 4/3 & -7/3\end{bmatrix}$$

$$\overline{b}=\beta^{-1}b=\begin{bmatrix}4\\ 1\\ 9\end{bmatrix}$$

ولتحديد مضروب السمبلكس في هذه المرحلة يكون كما يلي :

$$\pi=C_B\beta^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1\end{pmatrix}\beta^{-1}=\begin{pmatrix}-1/3 & 1/3 & 2/3\end{pmatrix}$$

وبما أن المتغيرات S_1; S_2 هي التي لم تدخل الحل لحد الآن فيتم حساب $\overline{C}_j$ لها فقط :

$$\overline{C}_{S_1}=C_{S_1}-\pi P_4=(0)-\begin{pmatrix}-1/3 & 1/3 & 2/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=1/3$$

$$\overline{C}_{S_2}=C_{S_2}-\pi P_5=(0)-\begin{pmatrix}-1/3 & 1/3 & 2/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 0\end{pmatrix}=1/3$$

إذن كلتا الكميتان متساويتان وهذا يعني أننا وصلنا إلى الحل الأمثل ويجب استخراج العمود الأيمن (الثابت) للمحاولة الأخيرة وهو بمثابة قيم المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل.

X_B		β^{-1}		b
X_1	1/3	2/3	-5/3	4
X_2	0	1	-2	1
X_3	2/3	4/3	-7/3	9

القيم المثلى للحل :

$$X_1 = 4; X_2 = 1; X_3 = 9; S_1 = S_2 = 0$$

$$Z = C_B\bar{b} = \begin{pmatrix}-3 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}4 \\ 1 \\ 9\end{bmatrix} = -2$$

المحور السابع

تحليل الحساسية (تحليل ما بعد الأمثلية)

I. مفهوم تحليل الحساسية

من النادر أن تكون معاملات برنامج خطي ما معروفة بصورة يقينية. غالبا هذه المعاملات تكون تخمينية للقيم الفعلية (الحقيقية). لذا، عندما ننتهي من إيجاد الحل الأمثل لمسألة برمجة خطية، لابد أن ندرس حساسية هذا الحل لأي تغير في قيمة أحد معاملات المسألة.

سنستخدم المثال التالي لشرح تحليل الحساسية (وهو في متغيرين فقط لإمكانية حل المسألة بالطريقة البيانية وفهم ما يجري فيما يلي من تحليل الحساسية):

$$\max \quad z = 20x_1 + 10x_2$$

$$S/C \left| \begin{array}{l} 245x_1 + 4x_2 \leq \\ 132x_1 + 5x_2 \leq \\ x_1 \ , \ x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

الصيغة القياسية المكافئة هي:

$$\max \quad z = 20x_1 + 10x_2$$

$$S/C \left| \begin{array}{l} 24\ 5x_1 + 4x_2 + s_1 \qquad = \\ 13\ 2x_1 + 5x_2 \qquad + s_2 = \\ x_1 , x_2 , s_1, s_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

وهو ما يكافئ التالي:

$$z - 20x_1 - 10x_2 \qquad = 0$$

$$S/C \left| \begin{array}{l} 245x_1 + 4x_2 + s_1 \qquad = \\ 13\ 2x_1 + 5x_2 \qquad + s_2 = \\ x_1 , x_2 , s_1, s_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

الحل باستخدام طريقة السمبلكس الجدولية:

	المتغيرات الأساسية	z	↓ X_1	X_2	S_1	S_2	rhs	r
	Z	1	-20	-10	0	0	0	
←	S_1	0	5	4	1	0	24	24/5
	S_2	0	2	5	0	1	13	13/2

المتغيرات الأساسية	z	x1	x2	s1	s2	rhs
z	1	0	6	4	0	96
x1	0	1	4/5	1/5	0	24/5
s2	0	0	17/5	-2/5	1	17/5

الحل الأمثل هو:

$$x_1^* = 4.8, \quad x_2^* = 0, \quad z^* = 96$$

السؤال الآن: لو تغيرت قيمة إحدى المعاملات التالية:

$c_1=20,\ c_2=10,\ b_1=24,\ b_2=13,\ a_{11}=5,\ a_{12}=4,\ a_{21}=2,\ a_{22}=5.$

هل يتأثر الحل الأمثل للمسألة؟ أي هل تتغير نقطة الحل الأساسي الممكن المثلى الحالية؟ أو قيمها؟

ما هو مقدار التغير في قيمة معامل ما بحيث يبقى الحل الأمثل هو نقطة الحل الأساسي الممكن المثلى الحالية (لكن قد تتغير بعض قيمها)؟

تحليل الحساسية سيجيب على هذه التساؤلات.

ملاحظة: لن ندرس تأثير تغير قيمة معاملان أو أكثر من معاملات البرنامج الخطي على الحل الأمثل. هذا الموضوع يسمى البرمجة الخطية المعاملية وليس مجال دراستنا هنا.

1. تأثير تغير قيمة معامل دالة الهدف لمتغير غير أساسي:

في المثال السابق، المتغير x_2 غير أساسي في نقطة الحل الأساسي الممكنة المثلى. ما هو مقدار التغير في قيمة c_2 بحيث أن لا تتأثر نقطة الحل الأساسي الممكنة المثلى؟

بصورة أخرى، لو كانت مساهمة المتغير x_2 في دالة الهدف هي: $c_2 = 10 + \Delta$

ما هي القيم الممكنة لـ Δ بحيث أن لا تتأثر نقطة الحل الأساسي الممكنة المثلى؟

أي أننا نسأل عن تأثير قيمة Δ على البرنامج الخطي التالي:

$$\max\ Z = 20X_1 + (10+\Delta)X_2$$

$$S/C \quad \begin{cases} 5X_1 + 4X_2 \le 24 \\ 2X_1 + 5X_2 \le 13 \\ x1\ ,\ x2 \ge 0 \end{cases}$$

لحسن الحظ، لا نحتاج أن نعيد حل المسألة كاملة من جديد لوجود المعامل الجديد $(10+\Delta)$.

لاحظ أن قيم المعاملات في الصف الأول من جدول السمبلكس يحدد فقط بعمليات أولية على الصفوف. أذا نظرنا إلى الصف الأول في الجدولين الأول والنهائي، نلاحظ أن معامل المتغير x_2 في الصف الأول تغير من 10- إلى 6+ (أي أننا أضفنا 16+).

لذا، لو كان معامل المتغير x_2 في الصف الأول من جدول السمبلكس الأول هو $-(10+\Delta)$، فإن معامل المتغير x_2 في الصف الأول من جدول السمبلكس النهائي سيكون $16 + -(10+\Delta)$ أو $6-\Delta$.

أي أن الجدول النهائي سيكون على الصورة التالية:

المتغيرات الأساسية	z	x1	x2	s1	s2	rhs
z	1	0	6-Δ	4	0	96
x1	0	1	4/5	1/5	0	24/5
s2	0	0	17/5	-2/5	1	17/5

يبقى السؤال الآن:

ما هي القيم الممكنة لـ Δ بحيث أن لا تتأثر نقطة الحل الأساسي الممكن المثلى الحالية؟

نحن نعلم أنه لكي يكون الحل أمثل، يجب أن تكون معاملات المتغيرات في الصف الأول من جدول السمبلكس غير سالبة. أذا، لكي تبقى نقطة الحل الأساسي الممكنة الحالية مثلى، لابد أن يكون:

$$6 - \Delta \geq 0 \text{ أو } -\infty \leq \Delta \leq 6$$

ولأن $c_2 = 10+\Delta$ و $\Delta \leq 6$، نقطة الحل الأساسي الممكنة الحالية ستبقى مثلى إذا كان:

$$-\infty \leq c_2 \leq 16$$

إذن طالما كان معامل المتغير x_2 في دالة الهدف في الفترة $]-\infty,16]$، يبقى الحل الأمثل هو:

$$x_1^* = 4.8, \quad x_2^* = 0, \quad z^* = 96$$

لاحظ أنه عندما يكون $c_2 = 16$، فأن معامل المتغير x_2 في الصف الأول من جدول السمبلكس النهائي سيكون مساويا للصفر. ولأن المتغير x_2 هو متغير غير أساسي عند نقطة الحل الأساسي الممكنة المثلى، فأنه سيكون هنالك حلول أساسية ممكنة مثلى أخرى للمسألة.

2. تأثير تغير قيمة معامل دالة الهدف لمتغير أساسي:

في المثال السابق، المتغير x_1 هو متغير أساسي في نقطة الحل الأساسي الممكنة المثلى. ما هو مقدار التغير في قيمة c_1 بحيث أن لا تتأثر نقطة الحل الأساسي الممكنة المثلى؟

بصورة أخرى، لو كانت مساهمة المتغير x_1 في دالة الهدف هي:

$$c_1 = 20 + \Delta$$

ما هي القيم الممكنة لـ Δ بحيث أن لا تتأثر نقطة الحل الأساسي الممكنة المثلى؟

أي أننا نسأل عن تأثير قيمة Δ على البرنامج الخطي التالي:

$$\max \quad z = (20+\Delta)x1 + 10x2$$

$$\text{S/C} \left| \begin{array}{l} 5x1 + 4x2 \leq 24 \\ 2x1 + 5x2 \leq 13 \\ x1 \ , \ x2 \geq 0 \end{array} \right.$$

لاحظ أنه عندما انتقلنا من جدول السمبلكس الأول إلى جدول السمبلكس النهائي، قيمة معامل المتغير x_1 في الصف الأول تغيرت من 20- إلى صفر. أي أنه أضيفت 20+ إلى معامل المتغير x_1 في الصف الأول من جدول السمبلكس الأول. لذا لو كانت قيمة معامل المتغير x_1 في الصف الأول من جدول السمبلكس الأول هي $-(20+\Delta)$، فإن قيمة معامل المتغير x_1 في الصف الأول من جدول السمبلكس النهائي ستكون

$$-(20+\Delta)+20 = -\Delta$$

أي أن جدول السمبلكس النهائي سيكون على الصورة التالية:

المتغيرات الأساسية	*z*	*x1*	*x2*	*s1*	*s2*	*rhs*
z	*1*	$-\Delta$	*6*	*4*	*0*	*96*
x1	*0*	*1*	*4/5*	*1/5*	*0*	*24/5*
s2	*0*	*0*	*17/5*	*-2/5*	*1*	*17/5*

لاحظ أن قيمة أي متغير أساسي في الصف الأول من جدول السمبلكس يجب أن تكون مساوية للصفر. هذا لا يتحقق هنا للمتغير الأساسي x_1.

بعد إجراء بعض العمليات الأولية على الصفوف (ضرب الصف الثاني بـ Δ وجمعه مع الصف الأول) نحصل على الجدول التالي:

المتغيرات الأساسية	z	x1	x2	s1	s2	rhs
z	1	0	6+4/5Δ	4+1/5Δ	0	96+24/5Δ
x1	0	1	4/5	1/5	0	24/5
s2	0	0	17/5	-2/5	1	17/5

هذا الجدول يوضح تأثير إضافة Δ إلى قيمة معامل المتغير x_1 في دالة الهدف.

لاحظ وجود Δ في الصف الأول من جدول السمبلكس النهائي في قيم المتغيران الغير أساسيان x_2 وs_1 وفي قيمة الطرف الأيمن.

لكي تبقى نقطة الحل الأساسي الممكنة الحالية مثلى، لابد أن تكون:

$$\left.\begin{array}{lcl} 6+\dfrac{4}{5}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -7.5 \\ 4+\dfrac{1}{5}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -20 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \Delta \geq -7.5$$

إذن لكي تبقى نقطة الحل الأساسي الممكنة الحالية مثلى، لابد أن تكون: $-7.5 \leq \Delta \leq \infty$

وبالتالي تكون:

$$12.5 \leq c_1 \leq \infty$$

إذن طالما كانت قيمة معامل المتغير x_1 في دالة الهدف في الفترة $[12.5,\infty)$، تبقى نقطة الحل الأساسي الممكنة الحالية مثلى. أي أن الحل الأمثل سيكون:

$$x_1^* = 4.8, \quad x_2^* = 0, \quad z^* = 96 + \frac{24}{5}\Delta$$

(لاحظ أن القيمة المثلى لدالة الهدف تعتمد على قيمة Δ المضافة).

3. تأثير تغير قيمة الطرف الأيمن لقيد خطي:

في المثال السابق، قيم الطرف الأيمن هي $b_1 = 24$ و$b_2 = 13$. ما هو تأثير تغير قيمة b_1 أو b_2 على نقطة الحل الأساسي الممكن المثلى الحالية؟

لنبدأ بالمعامل b_1. لو فرضنا أن $b_1 = 24+\Delta$، ما هي قيم Δ الممكنة بحيث أن يبقى الحل الأمثل هو نقطة الحل الأساسي الممكن المثلى الحالية (لكن قد تتغير قيم المتغيرات الأساسية)؟

أي أننا نسأل عن تأثير قيمة Δ على البرنامج الخطي التالي:

$$\text{S/C}\quad \left|\begin{array}{l} \max \quad z = 20X_1 + 10X_2 \\ 5X_1 + 4X_2 \leq 24+\Delta \\ 132X_1 + 5X_2 \leq \\ X_1 \;,\; X_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

جدول السمبلكس المبدئي سيكون على الشكل التالي:

المتغيرات الأساسية	z	x1	x2	s1	s2	rhs
z	1	-20	-10	0	0	0
s1	0	5	4	1	0	24+Δ
s2	0	2	5	0	1	13

نحن نريد أن نعرف شكل جدول السمبلكس النهائي (الأمثل) بعد إضافة القيمة Δ للطرف الأيمن للقيد الخطي الأول. لحسن الحظ، كما سبق، لا نحتاج إلى أن نعيد حل المسألة من جديد.

أنظر إلى الجدول التالي:

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	rhs b + Δ
Z	1	-20	-10	0	0	0 + 0
S_1	0	5	4	1	0	24 + 1
S_2	0	2	5	0	1	13 + 0

لاحظ أن العمود الخاص بـ Δ له نفس معاملات العمود الخاص بـ s_1. إذن جميع العمليات على الصفوف التي أجريت على العمود الخاص بـ s_1 ستجرى على العمود الخاص بـ Δ. هذا يقتضي أن العمود الخاص بـ Δ في جدول السمبلكس النهائي سيكون مماثلا للعمود الخاص بـ s_1 في جدول السمبلكس النهائي.

إذن سيكون جدول السمبلكس النهائي للمسألة بعد إضافة القيمة Δ للطرف الأيمن للقيد الخطي الأول كما يلي:

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	rhs
Z	1	0	6	4	0	96 + 4 Δ
X_1	0	1	4/5	1/5	0	24/5 + 1/5 Δ
S_2	0	0	17/5	-2/5	1	17/5 – 2/5 Δ

يبقى السؤال ما هي القيم الممكنة لـ Δ (وبالتالي لـ b_1) بحيث أن يبقى الحل الأمثل هو نقطة الحل الأساسي الممكن المثلى الحالية (لكن قد تتغير قيم المتغيرات الأساسية)؟

لكي يبقى الحل ممكناً، لابد أن يكون

$$x_1 \geq 0$$

$$s_2 \geq 0$$

أي أن

$$\left.\begin{array}{l} \frac{24}{5}+\frac{1}{5}\Delta \geq 0 \;\Rightarrow\; \Delta \geq -24 \\ \frac{17}{5}-\frac{2}{5}\Delta \geq 0 \;\Rightarrow\; \Delta \leq 8.5 \end{array}\right\} \Rightarrow -24 \leq \Delta \leq 8.5$$

وبالتالي: $0 \leq b_1 \leq 32.5$

مثلاً، لو كانت $6 = \Delta$، أي أن $b_1 = 30$، فإن المتغيرات الأساسية في نقطة الحل الأساسي الممكن ستبقى أساسية، ولكن تتغير قيمتها لتصبح:

$$x_1^* = \frac{24}{5} + \frac{1}{5}(6) = 6$$
$$s_2^* = \frac{17}{5} - \frac{2}{5}(6) = 1$$
$$z^* = 96 + 4(6) = 120$$

بالمثل، لتحليل الحساسية للمعامل b_2، ندرس تأثير تغيير قيمة الطرف الأيمن للقيد الخطي الثاني إلى

$b_2 = 13 + \Delta$، سنجد أن جدول السمبلكس النهائي سيكون كما يلي:

المتغيرات الأساسية	z	x1	x2	s1	s2	rhs
z	1	0	6	4	0	96
x1	0	1	4/5	1/5	0	24/5
s2	0	0	17/5	-2/5	1	$17/5 + \Delta$

لكي يبقى الحل ممكناً، لابد أن يكون

$$x_1 \geq 0$$

$$s_2 \geq 0$$

أي أن: $\frac{17}{5} + \Delta \geq 0 \Rightarrow -\frac{17}{5} \leq \Delta \leq \infty$

وبالتالي: $9.6 \leq b_2 \leq \infty$

لاحظ أن مفتاح تحليل الحساسية للطرف الأيمن لقيد خطي هو إيجاد متغير له معاملات مشابهه لمعاملات المتغير Δ الذي أضيف للطرف الأيمن من معادلة القيد الخطي. غالباً، المتغيرات التي لها معاملات مشابهه لمعاملات المتغير Δ هي المتغيرات المكملة أو الزائدة أو الاصطناعية التي أضيفت للقيود الخطية.

II. سعر الظل:

تعريف: سعر الظل للقيد الخطي i (يرمز له بـ y_i) هو مقدار التغير في قيمة دالة الهدف (z) إذا زدنا الطرف الأيمن للقيد الخطي (b_i) بمقدار وحدة واحدة، شريطة أن لا تتغير المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل وأن لا تتغير عوامل المسألة الأخرى.

أي أن y_i يساوي معدل التغير في قيمة دالة الهدف المثلى z^* عندما نزيد قيمة b_i ضمن الحدود المسموحة بتحليل الحساسية (إذا كان التغير في قيمة b_i يقع على حد المنطقة المسموحة بتحليل الحساسية، الحل الأمثل سيصبح منحل (غير منتظم) ويصبح هذا التعريف غير صحيح) .

لأن أغلب القيود الخطية في مسائل البرمجة الخطية هي متراجحات تستخدم العلاقة "$\leq$" (أقل من أو يساوي) بين الطرف الأيسر والطرف الأيمن للقيد الخطي، فإن أسعار الظل غالبا تسمى الأسعار الاقتصادية. أي أن y_i هو السعر الاقتصادي لشراء وحدة إضافية من المورد b_i.

في المثال السابق، ما هو سعر الظل للقيد الخطي الأول؟

نحن نعلم الآن أن زيادة b_1 بمقدار Δ يزيد دالة الهدف بمقدار 4Δ. إذن سعر الظل للقيد الخطي الأول هو 4.

نستطيع معرفة أسعار الظل لجميع القيود الخطية باستخدام القاعدة التالية:

III. قاعدة إيجاد أسعار الظل:

سعر الظل y_i للقيد الخطي i يظهر في الصف الأول من جدول السمبلكس النهائي (الأمثل) تحت المتغير المكمل أو الزائد أو المتغير الاصطناعي لهذا القيد الخطي.

أ) سعر الظل لقيد خطي يستخدم العلاقة "$\leq$" (أقل من أو يساوي) بين الطرف الأيسر والطرف الأيمن للقيد الخطي يساوي معامل المتغير المكمل لهذا القيد الخطي في الصف الأول من جدول السمبلكس الأمثل.

ب) سعر الظل لقيد خطي يستخدم العلاقة "$\geq$" (أكبر من أو يساوي) بين الطرف الأيسر والطرف الأيمن للقيد الخطي يساوي سالب معامل المتغير الزائد لهذا القيد الخطي في الصف الأول من جدول السمبلكس الأمثل. كما يمكن استخدام معامل المتغير الاصطناعي لهذا القيد الخطي بطريقة مماثلة لما سيبين في الفقرة (3).

ت) سعر الظل لقيد خطي يستخدم العلاقة "=" (يساوي) بين الطرف الأيسر والطرف الأيمن للقيد الخطي هو:

- إذا كانت دالة الهدف هي دالة تعظيم، فإنه يساوي معامل المتغير الاصطناعي لهذا القيد الخطي في الصف الأول من جدول السمبلكس الأمثل ناقصا M.
- إذا كانت دالة الهدف هي دالة تصغير، فإنه يساوي معامل المتغير الاصطناعي لهذا القيد الخطي في الصف الأول من جدول السمبلكس الأمثل زائدا M.

في المثال السابق:

سعر الظل للقيد الخطي الأول: $y1 = 4$

سعر الظل للقيد الخطي الثاني: $y2 = 0$

مثال:

أ) أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي:

$$\min\ z = 4x1 + 5x2$$

$$S/C\ \begin{cases} 3x1 + x2 \leq 27 \\ 5x1 + 5x2 = 60 \\ 6x1 + 4x2 \geq 60 \\ x1\ ,\ x2 \geq 0 \end{cases}$$

ب) أوجد تحليل الحساسية لمعاملات c1, c2, b1, b2, b3.

ت) أوجد أسعار الظل للقيود الخطية.

الحل:

أ) نحول المسألة إلى الصيغة القياسية التالية:

$$\min\ z = 4x1 + 5x2$$

$$S/C\ \begin{cases} 3x1 + x2 + s1 = 27 \\ 5x1 + 5x2 = 60 \\ 6x1 + 4x2 - e3 = 60 \\ x1\ ,\ x2\ , s1\ ,\ e3 \geq 0 \end{cases}$$

الآن نضيف المتغيرات الاصطناعية (سنستخدم طريقة M الكبيرة):

$$\min\ z = 4X_1 + 5X_2 + Ma_2 + Ma_3$$

$$S/C\ \begin{cases} 3X_1 + X_2 + s_1 = 27 \\ 5X_1 + 5X_2 + a_2 = 60 \\ 6X_1 + 4X_2 - e_3 + a_3 = 60 \\ X_1 , X_2 , s_1 , e_3 , a_2 , a_3 \geq 0 \end{cases}$$

وهو ما يكافئ:

$$\begin{cases} z - 4x1 - 5x2 - Ma2 - Ma3 = 0 \\ 3x1 + x2 + s1 = 27 \\ 5x1 + 5x2 + a2 = 60 \\ 6x1 + 4x2 - e3 + a3 = 60 \\ x1 , x2 , s1 , e3 , a2 , a3 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أنه لكي يكون لدينا حل أساسي ممكن مبدئي، لابد أن نجعل معاملي المتغيرين الاصطناعيين a_2 و a_3 في دالة الهدف مساوية للصفر. بضرب المعادلة الثالثة والمعادلة الرابعة بـ (M) وأضافتهما إلى المعادلة الأولى نحصل على نظام المعادلات المكافئ التالي:

$$\begin{cases} z + (11M-4)x1 + (9M-5)x2 - Me3 = 120M \\ 3x1 + x2 + s1 = 27 \\ 5x1 + 5x2 + a2 = 60 \\ 6x1 + 4x2 - e3 + a3 = 60 \\ x1 , x2 , s1 , e3 , a2 , a3 \geq 0 \end{cases}$$

	المتغيرات الأساسية	z	↓ x1	x2	s1	e3	a2	a3	rhs	r
	z	1	11M-4	9M-5	0	-M	0	0	120M	
←	s1	0	3	1	1	0	0	0	27	27/3
	a2	0	5	5	0	0	1	0	60	60/5
	a3	0	6	4	0	-1	0	1	60	60/6

م أ		z	x1	↓ x2	s1	e3	a2	a3	rhs	r
	z	1	0	16/3M -11/3	-11/3M+4/3	-M	0	0	21M+36	
	x1	0	1	1/3	1/3	0	0	0	9	9/(1/3)
	a2	0	0	10/3	-5/3	0	1	0	15	15/(10/3)
←	a3	0	0	2	-2	-1	0	1	6	6/2

	المتغيرات الأساسية	z	x1	x2	s1	↓ e3	a2	a3	rhs	r
	z	1	0	0	/375/3M-	5/3M-11/6	0	-8/3M+11/6	5M+47	
	x1	0	1	0	2/3	1/6	0	-1/6	8	8/(1/6)
←	a2	0	0	0	5/3	5/3	1	-5/3	5	5/(5/3)
	x2	0	0	1	-1	-1/2	0	1/2	3	-

المتغيرات

	z	x1	x2	s1	e3	a2	a3	rhs
z	1	0	0	-1/2	0	-M+11/10	-M	105/2
x1	0	1	0	1/2	0	-1/10	0	15/2
e3	0	0	0	1	1	3/5	-1	3
x2	0	0	1	-1/2	0	3/10	0	9/2

الحل الأمثل هو:

$$x_1^* = 7.5$$
$$x_2^* = 4.5$$
$$z^* = 52.5$$

IV. تحليل الحساسية:

1. تحليل الحساسية لمعامل المتغير الأساسي x_1 في دالة الهدف:

نريد معرفة تأثير إضافة القيمة Δ للمعامل $c_1=4$.

إذا أصبحت قيمة معامل المتغير الأساسي x_1 في دالة الهدف هي $c_1=4+\Delta$، فإن جدول السمبلكس النهائي سيكون على الصورة التالية:

نجعل معامل المتغير x_1 في الصف الأول مساوياً للصفر. نضرب الصف الثاني بـ(Δ)

المتغيرات الأساسية	z	x1	x2	s1	e3	a2	a3	rhs
z	1	-Δ	0	-1/2	0	-M+11/10	-M	105/2
x1	0	1	0	1/2	0	-1/10	0	15/2
e3	0	0	0	1	1	3/5	-1	3
x2	0	0	1	-1/2	0	3/10	0	9/2

ونجمعه مع الصف الأول. نحصل على جدول السمبلكس التالي:

المتغيرات الأساسية	z	x1	x2	s1	e3	a2	a3	rhs
z	1	0	0	-1/2+1/2Δ	0	-M+11/10-1/10Δ	-M	105/2+15/2Δ
x1	0	1	0	1/2	0	-1/10	0	15/2
e3	0	0	0	1	1	3/5	-1	3
x2	0	0	1	-1/2	0	3/10	0	9/2

الآن، لكي تبقى نقطة الحل الأساسي الممكنة المثلى الحالية حلا أمثل، يجب أن تكون:

$$-1/2+1/2\Delta \leq 0$$

أي أن: $-\infty \leq \Delta \leq 1$ وبالتالي: $-\infty \leq c_1 \leq 5$

لاحظ أن قيمة المعامل($-M+11/10-1/10\Delta$) ستظل سالبة لأن قيمة M كبيرة.

مثلاً، لو كانت $c_1 = 2$ (أي أن $\Delta=-2$)، فإن الحل الأمثل هو:

$$x_1^* = 7.5$$
$$x_2^* = 4.5$$
$$z^* = 52.5 + 7.5(-2) = 37.5$$

2. تحليل الحساسية لمعامل المتغير الأساسي x_2 في دالة الهدف:

نريد معرفة تأثير إضافة القيمة Δ للمعامل c_2=5.

إذا أصبحت قيمة معامل المتغير الأساسي x_2 في دالة *الهدف* هي c_2=5+Δ، فإن جدول السمبلكس النهائي سيكون على *الصورة التالية:*

المتغيرات الأساسية	z	x1	x2	s1	e3	a2	a3	rhs
z	1	0	-Δ	-1/2	0	-M+11/10	-M	105/2
x1	0	1	0	1/2	0	-1/10	0	15/2
e3	0	0	0	1	1	3/5	-1	3
x2	0	0	1	-1/2	0	3/10	0	9/2

نجعل معامل المتغير x_2 في الصف الأول مساوياً للصفر. نضرب الصف الرابع بـ(Δ) ونجمعه مع الصف الأول. نحصل على جدول السمبلكس التالي:

المتغيرات الأساسية	*z*	*x_1*	*x_2*	*s_1*	*e_3*	*a_2*	*a_3*	*rhs*
z	*1*	*0*	*0*	*-1/2-1/2Δ*	*0*	*-M+11/10+3/10Δ*	*-M*	*105/2+9/2Δ*
x_1	*0*	*1*	*0*	*1/2*	*0*	*-1/10*	*0*	*15/2*
e_3	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*3/5*	*-1*	*3*
x_2	*0*	*0*	*1*	*-1/2*	*0*	*3/10*	*0*	*9/2*

الآن، لكي تبقى نقطة الحل الأساسي الممكنة المثلى الحالية حلا أمثل، يجب أن تكون: 0 ≤ Δ1/2-1/2- أي أن: $-1 \leq \Delta \leq \infty$

وبالتالي: $4 \leq c_2 \leq \infty$

مثلاً، لو كانت $c_2 = 7$ (أي أن Δ=2)، فإن الحل الأمثل هو:

$$x_1^* = 7.5$$
$$x_2^* = 4.5$$
$$z^* = 52.5 + 4.5(2) = 61.5$$

3. تحليل الحساسية لمعامل الطرف الأيمن للقيد الخطي الأول (b_1):

إذا أصبحت قيمة معامل الطرف الأيمن للقيد الخطي الأول هي b_1=27+Δ، فإن جدول السمبلكس النهائي سيكون على الصورة التالية (استخدمنا المتغير المكمل s_1):

المتغيرات الأساسية	z	x_1	x_2	s_1	e_3	a_2	a_3	rhs
z	1	0	0	-1/2	0	-M+11/10	-M	105/2-1/2Δ
x_1	0	1	0	1/2	0	-1/10	0	15/2+1/2Δ
e_3	0	0	0	1	1	3/5	-1	3+Δ
x_2	0	0	1	-1/2	0	3/10	0	9/2-1/2 Δ

الآن، لكي تبقى نقطة الحل الأساسي الممكنة المثلى الحالية مكونة من نفس المتغيرات الأساسية والمتغيرات الغير أساسية، يجب أن تكون:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{15}{2}+\frac{1}{2}\Delta \ge 0 \Rightarrow & \Delta \ge -15 \\ 3+\quad \Delta \ge 0 \Rightarrow & \Delta \ge -3 \\ \frac{9}{2}-\frac{1}{2}\Delta \ge 0 \Rightarrow & \Delta \le 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \ -3 \le \Delta \le 9$$

وبالتالي: $24 \le b_1 \le 36$

مثلاً، لو كانت $b_1 = 30$ (أي أن $\Delta=3$)، فإن الحل الأمثل هو:

$$x_1^* = 7.5+\frac{1}{2}(3)=9$$

$$x_2^* = 4.5-\frac{1}{2}(3)=3$$

$$z^* = 52.5-\frac{1}{2}(3)=51$$

4. **تحليل الحساسية لمعامل الطرف الأيمن للقيد الخطي الثاني (b_2):**

إذا أصبحت قيمة معامل الطرف الأيمن للقيد الخطي الثاني هي $b_2=60+\Delta$، فإن جدول السمبلكس النهائي سيكون على الصورة التالية (استخدمنا المتغير الاصطناعي a_2):

المتغيرات الأساسية	z	x_1	x_2	s_1	e_3	a_2	a_3	rhs
z	1	0	0	-1/2	0	$-M$+11/10	$-M$	105/2+11/10Δ
x_1	0	1	0	1/2	0	-1/10	0	15/2-1/10Δ
e_3	0	0	0	1	1	3/5	-1	3+3/5Δ
x_2	0	0	1	-1/2	0	3/10	0	9/2+3/10Δ

الآن، لكي تبقى نقطة الحل الأساسي الممكنة المثلى الحالية مكونة من نفس المتغيرات الأساسية والمتغيرات الغير أساسية، يجب أن تكون

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{15}{2}-\frac{1}{10}\Delta \ge 0 \ \Rightarrow & \Delta \le 75 \\ 3+\frac{3}{5}\Delta \ge 0 \ \Rightarrow & \Delta \ge -5 \\ \frac{9}{2}+\frac{3}{10}\Delta \ge 0 \ \Rightarrow & \Delta \ge -15 \end{array}\right\} \Rightarrow \ -5 \le \Delta \le 75$$

وبالتالي: $55 \le b_2 \le 135$

مثلاً، لو كانت $b_2 = 56$ (أي أن $\Delta=-4$)، فإن الحل الأمثل هو:

$$x_1^* = 7.5 - \frac{1}{10}(-4) = 7.9$$

$$x_2^* = 4.5 + \frac{3}{10}(-4) = 3.3$$

$$z^* = 52.5 + \frac{11}{10}(-4) = 48.1$$

5. تحليل الحساسية لمعامل الطرف الأيمن للقيد الخطي الثاني (b_3):

إذا أصبحت قيمة معامل الطرف الأيمن للقيد الخطي الثالث هي $b_3=60+\Delta$، فإن جدول السمبلكس النهائي سيكون على الصورة التالية (استخدمنا المتغير الاصطناعي a_3 أو سالب المتغير الزائد e_3):

المتغيرات الأساسية	z	x_1	x_2	s_1	e_3	a_2	a_3	rhs
z	1	0	0	-1/2	0	-M+11/10	-M	105/2
x_1	0	1	0	1/2	0	-1/10	0	15/2
e_3	0	0	0	1	1	3/5	-1	$3-\Delta$
x_2	0	0	1	-1/2	0	3/10	0	9/2

الآن، لكي تبقى نقطة الحل الأساسي الممكنة المثلى الحالية مكونة من نفس المتغيرات الأساسية والمتغيرات الغير أساسية، يجب أن تكون: $3-\Delta \ge 0 \;\Rightarrow\; -\infty \le \Delta \le 3$

وبالتالي: $-\infty \le b_3 \le 63$

مثلاً، لو كانت $b_3 = 30$ (أي أن $\Delta=-30$)، فإن الحل الأمثل هو:

$$x_1^* = 7.5$$

$$x_2^* = 4.5$$

$$z^* = 52.5$$

جـ) أسعار الظل هي:

$y_1 = -1/2$

$y_2 = 11/10$

$y_3 = 0$

مثال:

أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } z = -2X1 - X2 - 5X3$$

$$S/C\;\begin{cases} 3X1 + X2 + 4X3 \ge 2 \\ 5X1 + 2X2 + 2X3 \le 3 \\ 2X1 + X2 + 3X3 = 4 \\ X1,\; X2,\; X3 \ge 0 \end{cases}$$

أ) أوجد تحليل الحساسية لمعاملات c1, c2, c3, b1, b2, b3.

ب) أوجد أسعار الظل للقيود الخطية.

- الحل

أ) نحول المسألة إلى الصيغة القياسية التالية:

$$\text{Max } z = -2X1 - X2 - 5X3$$

$$S/C \quad \begin{cases} 3X1 + X2 + 4X3 - e1 = 2 \\ 5X1 + 2X2 + 2X3 + S2 = 3 \\ 2X1 + X2 + 3X3 = 4 \\ X1 , X2 , X3 , e1 , S2 \geq 0 \end{cases}$$

الآن نضيف المتغيرات الاصطناعية (سنستخدم طريقة M الكبيرة):

$$\text{Max } z = -2X1 - X2 - 5X3 - MA1 - MA3 = 0$$

$$S/C \quad \begin{cases} 3X1 + X2 + 4X3 - e1 + A1 = 2 \\ 5X1 + 2X2 + 2X3 + S2 = 3 \\ 2X1 + X2 + 3X3 + A3 = 4 \\ X1 , X2 , X3 , e1 , S2 , A1 , A3 \geq 0 \end{cases}$$

وهو ما يكافئ:

$$z + 2X1 + X2 + 5X3 + MA1 + MA3 = 0$$

$$S/C \quad \begin{cases} 3X1 + X2 + 4X3 - e1 + A1 = 2 \\ 5X1 + 2X2 + 2X3 + S2 = 3 \\ 2X1 + X2 + 3X3 + A3 = 4 \\ X1 , X2 , X3 , e1 , S2 , A1 , A3 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أنه لكي يكون لدينا حل أساسي ممكن مبدئي، لابد أن نجعل معاملي المتغيران الاصطناعيين A_1 و A_3 في دالة الهدف مساوية للصفر. بضرب المعادلة الثالثة والمعادلة الرابعة بـ $(-M)$ وأضافتهما إلى المعادلة الأولى نحصل على نضام المعادلات المكافئ التالي:

$$z + (2-5M)X1 + (1-2M)X2 + (5-7M)X3 + Me1 = -6M$$

$$S/C \quad \begin{cases} 3X1 + X2 + 4X3 - e1 + A1 = 2 \\ 5X1 + 2X2 + 2X3 + S2 = 3 \\ 2X1 + X2 + 3X3 + A3 = 4 \\ X1 , X2 , X3 , e1 , S2 , A1 , A3 \geq 0 \end{cases}$$

م الأساسية	z	x1	x2	x3↓	e1	s2	a1	a3	rhs	r
z	1	2-5M	1-2M	5-7M	M	0	0	0	-6M	
← a1	0	3	1	4	-1	0	1	0	2	2/4
s2	0	5	2	2	0	1	0	0	3	3/2
a3	0	2	1	3	0	0	0	1	4	4/3

م الأساسية	z	x1	x2	x3	e1↓	s2	a1	a3	rhs	r
z	1	M/4-7/4	-M/4-1/4	0	-3/4M+5/4	0	7/4M-5/4	0	-5/2M-5/2	
x3	0	3/4	1/4	1	-1/4	0	1/4	0	1/2	-
s2	0	7/2	3/2	0	1/2	1	-1/2	0	2	4
← a3	0	-1/4	1/4	0	3/4	0	-3/4	1	5/2	10/3

م الأساسية	z	↓x1	x2	x3	e1	s2	a1	a3	rhs	r
z	1	-4/3	-2/3	0	0	0	M	M-5/3	-20/3	
x3	0	2/3	1/3	1	0	0	0	1/3	4/3	2
← s2	0	11/3	4/3	0	0	1	0	-2/3	1/3	1/11
e1	0	-1/3	1/3	0	1	0	-1	4/3	10/3	-

المتغيرات الأساسية	z	x1	x2 ↓	x3	e1	s2	a1	a3	rhs	r
z	1	0	-2/11	0	0	4/11	M	M-21/11	-72/11	
x3	0	0	1/11	1	0	-2/11	0	5/11	14/11	14
← x1	0	1	4/11	0	0	3/11	0	-2/11	1/11	1/4
e1	0	0	5/11	0	1	1/11	-1	14/11	37/11	37/5

المتغيرات الأساسية	z	x1	x2	x3	e1	s2	a1	a3	rhs
z	1	1/2	0	0	0	1/2	M	M-2	-13/2
x3	0	-1/4	0	1	0	-1/4	0	1/2	5/4
x2	0	11/4	1	0	0	3/4	0	-1/2	1/4
e1	0	-5/4	0	0	1	-1/4	-1	3/2	13/4

إذن الحل الأمثل هو:

$$x_1^* = 0$$

$$x_2^* = 0.25$$

$$x_3^* = 1.25$$

$$z^* = -6.5$$

ب) تحليل الحساسية:

- **تحليل الحساسية لمعامل المتغير الغير أساسي x_1 في دالة الهدف:**

إذا أصبحت قيمة معامل المتغير x_1 في دالة الهدف هي $c_1=-2+\Delta$، فإن معامل المتغير x_1 في جدول السمبلكس النهائي سيكون $1/2 - \Delta$. ولكي تبقى نقطة الحل الأساسي الممكنة المثلى الحالية حلا أمثل، يجب أن تكون: $1/2 - \Delta \geq 0$

أي أن: $-\infty \leq \Delta \leq 1/2$

وبالتالي: $-\infty \leq c_1 \leq -1.5$

- **تحليل الحساسية لمعامل المتغير الأساسي x_2 في دالة الهدف:**

إذا أصبحت قيمة معامل المتغير x_2 في دالة الهدف هي $c_2=-1+\Delta$، فإن معامل المتغير x_2 في جدول السمبلكس النهائي سيكون $-\Delta$. نجري العمليات الأولية على الصفوف لجعل معامل المتغير x_2 في جدول السمبلكس النهائي مساويا للصفر. يصبح الصف الأول في جدول السمبلكس النهائي كما يلي:

م الأساسية	z	x1	x2	x3	e1	s2	a1	a3	rhs
z	1	1/2+11/4Δ	0	0	0	1/2+3/4Δ	M	M-2-1/2Δ	-13/2+1/4Δ

لكي تبقى نقطة الحل الأساسي الممكنة المثلى الحالية حلا أمثل، يجب أن تكون

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}+\frac{11}{4}\Delta \geq 0 \;\Rightarrow\; \Delta \geq -\frac{2}{11} \\ \frac{1}{2}+\frac{3}{4}\Delta \geq 0 \;\Rightarrow\; \Delta \geq -\frac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow\; -\frac{2}{11} \leq \Delta \leq \infty$$

وبالتالي: $-\frac{13}{11} \leq c_2 \leq \infty$

- **تحليل الحساسية لمعامل المتغير الأساسي x_3 في دالة الهدف:**

إذا أصبحت قيمة معامل المتغير x_3 في دالة الهدف هي c_3=-5+Δ، فإن معامل المتغير x_3 في جدول السمبلكس النهائي سيكون Δ-. نجري العمليات الأولية على الصفوف لجعل معامل المتغير x_3 في جدول السمبلكس النهائي مساويا للصفر. يصبح الصف الأول في جدول السمبلكس النهائي كما يلي:

م الأساسية	z	x_1	x_2	x_3	e_1	s_2	a_1	a_3	rhs
z	1	1/2-1/4Δ	0	0	0	1/2-1/4Δ	M	M-2+1/2Δ	-13/2+5/4Δ

لكي تبقى نقطة الحل الأساسي الممكنة المثلى الحالية حلا أمثل، يجب أن تكون: $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\Delta \geq 0 \Rightarrow -\infty \leq \Delta \leq 2$

وبالتالي: $-\infty \leq c_3 \leq -3$

- **تحليل الحساسية لمعامل الطرف الأيمن للقيد الخطي الأول:**

إذا أصبحت قيمة الطرف الأيمن للقيد الخطي الأول هي b_1=2+Δ، فإن الطرف الأيمن في جدول السمبلكس النهائي سيصبح كما يلي:

rhs
-13/2
5/4
1/4
13/4-Δ

لكي تبقى نقطة الحل الأساسي الممكنة المثلى الحالية مكونة من نفس المتغيرات الأساسية والمتغيرات الغير أساسية، يجب أن تكون: $\frac{13}{4}-\Delta \geq 0 \Rightarrow -\infty \leq \Delta \leq \frac{13}{4}$

وبالتالي: $-\infty \leq b_1 \leq \frac{21}{4}$

- **تحليل الحساسية لمعامل الطرف الأيمن للقيد الخطي الثاني:**

إذا أصبحت قيمة الطرف الأيمن للقيد الخطي الثاني هي b_2=3+Δ، فإن الطرف الأيمن في جدول السمبلكس النهائي سيصبح كما يلي:

rhs
-13/2+1/2Δ
5/4-1/4Δ
1/4+3/4Δ
13/4-1/4Δ

لكي تبقى نقطة الحل الأساسي الممكنة المثلى الحالية مكونة من نفس المتغيرات الأساسية والمتغيرات الغير أساسية، يجب أن تكون:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\Delta\geq 0\Rightarrow\Delta\leq 5\\ \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\Delta\geq 0\Rightarrow\Delta\geq-\frac{1}{3}\\ \frac{13}{4}-\frac{1}{4}\Delta\geq 0\Rightarrow\Delta\leq 13\end{array}\right\}\Rightarrow\ -\frac{1}{3}\leq\Delta\leq 5$$

وبالتالي: $\frac{8}{3}\leq b_2\leq 8$

- **تحليل الحساسية لمعامل الطرف الأيمن للقيد الخطي الثالث:**

إذا أصبحت قيمة الطرف الأيمن للقيد الخطي الثالث هي $b_3=4+\Delta$، فإن الطرف الأيمن في جدول السمبلكس النهائي سيصبح كما يلي:

rhs
-13/2-2Δ
5/4+1/2Δ
1/4-1/2Δ
13/4+3/2Δ

لكي تبقى نقطة الحل الأساسي الممكنة المثلى الحالية مكونة من نفس المتغيرات الأساسية والمتغيرات الغير أساسية، يجب أن تكون:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\Delta\geq 0\Rightarrow\Delta\geq-\frac{5}{2}\\ \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\Delta\geq 0\Rightarrow\Delta\leq\frac{1}{2}\\ \frac{13}{4}+\frac{3}{2}\Delta\geq 0\Rightarrow\Delta\geq-\frac{13}{6}\end{array}\right\}\Rightarrow\ -\frac{13}{6}\leq\Delta\leq\frac{1}{2}$$

وبالتالي: $\frac{11}{6}\leq b_3\leq\frac{9}{2}$

جـ) أسعار الظل هي

y1 = 0
y2 = 1/2
y3 = -2

المحور الثامن

مسائل النقل

تعتبر مسألة النقل إحدى تطبيقات البرمجة الخطية الهامة، حيث أنها تهتم بتوزيع المنتجات من عدة مصادر للعرض (معامل، موانئ ...) إلى عدة مواقع للطلب (مراكز استهلاكية) بأقل تكلفة ممكنة أو بأعلى ربح أو بأقل وقت. فالبرمجة الخطية تستعمل للتوزيع الأمثل للموارد بالمؤسسة، أما طريقة النقل لها نفس هذه الخواص مضافا إليها شرط تساوي العرض مع الطلب.

I. عرض مسألة النقل:

سنقوم بعرض مسألة النقل من خلال المثال أدناه:

مثال 01:

لنفرض أنه لدينا مؤسسة اقتصادية لها 3 وحدات إنتاجية O1، O2، O3 متواجدة في ثلاث مناطق مختلفة، كما أنها تتوفر على 5 مراكز توزيع D1، D2، D3، D4، D5، حيث أن هذه المؤسسة تنتج المنتج P على مستوى مراكز الإنتاج، ثم تقوم بتوزيعه على مراكز التوزيع الخمسة.

تعرض مراكز الإنتاج (المنبع)كميات معينة من الإنتاج: a1، a2، a3، أما مراكز التوزيع (المصب) فتقوم بطلب كميات معينة من الإنتاج: b1، b2، b3، b4، b5، كما هو موضح في الجدولين أدناه.

مركز الإنتاج	O1	O2	O3
الطاقة الإنتاجية (العرض) (di)	A_1=240	A_2=160	A_3=260

مركز التوزيع	D1	D2	D3	D4	D5
الطلب (bj)	b1=120	b2=150	b3=145	b4=125	b5=140

عملية نقل المنتج P من مراكز الإنتاج الثلاثة إلى مراكز التوزيع الخمسة يترتب عليها تحمل تكلفة النقل Cij.

Cij تمثل تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المنتج P من مراكز الإنتاج i إلى مركز التوزيع j .

تكلفة النقل الوحدوية يقدمها الجدول أدناه:

Cij	D1	D2	D3	D4	D5
O1	C11=100	C12=800	C13=100	C14=500	C15=400
O2	C21=500	C22=500	C23=300	C24=600	C25=700
O3	C31=200	C32=900	C33=500	C34=900	C35=800

مشكل المؤسسة هو تحديد الكميات xij الواجب نقلها من مراكز الإنتاج إلى مراكز التوزيع.

II. نمذجة مسائل النقل:

1. تشكيل جدول مسائل النقل:

إن العرض الإنشائي لمسألة النقل حسب المثال أعلاه، يمكن تلخيصه في جدول شامل يسمى جدول مسألة النقل، يكون كالتالي:

الجدول رقم 23: جدول مسألة النقل للمثال 01-01

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
O_1	C11=100 x_{11}	C12=800 x_{12}	C_{13}=100 x_{13}	C14=500 x_{14}	C15=400 x_{15}	240
O_2	C21=500 x_{21}	C22=500 x_{22}	C23=300 x_{23}	C24=600 x_{24}	C25=700 x_{25}	160
O_3	C31=200 x_{31}	C32=900 x_{32}	C33=500 x_{33}	C34=900 x_{34}	C35=800 x_{35}	260
b_i	120	130	145	125	140	660

يلخص جدول مسائل النقل كامل المسألة، بحيث تظهر فيه تكاليف نقل الوحدة الواحدة من كل وحدة إنتاجية إلى كل مركز توزيع في أعلى كل خانة، وتظهر متغيرات المسألة وهي القيم X_{ij} المراد البحث عنها، كما تظهر الكميات القصوى التي تعرضها كل وحدة، وكذا كمية الطلب لكل منطقة.

2. الصياغة الرياضية لمسائل النقل:

يمكن صياغة مشكل النقل في شكل نموذج رياضي كما يلي:

أ- تحديد متغيرات الأساس: تمثل القيم X_{ij} متغيرات الأساس في مسائل النقل، وعددها في مثالنا السابق 15 متغيرة قرار، حيث:

x11 : تمثل الكمية الواجب نقلها من مركز الإنتاج O1 إلى مركز التوزيع D1 .

x43 : تمثل الكمية الواجب نقلها من مركز الإنتاج O4 إلى مركز التوزيع D3 .

ب- صياغة دالة الهدف: دالة الهدف في هذه الحالة هي عبارة عن تدنئة التكاليف المترتبة عن عملية النقل. وتكون من الشكل التالي: $Min\ Z = \sum C_{ij}\, x_{ij}$

$$Min\ Z = 100\ x_{11} + 800\ x_{12} + 100\ x_{13} + 500\ x_{14} + 400\ x_{15} + 500\ x_{21} + 500\ x_{22} + 300\ x_{23} + 600\ x_{24} + 700\ x_{25} + 200\ x_{31} + 900\ x_{32} + 500\ x_{33} + 900\ x_{34} + 800\ x_{35}$$

جـ- صياغة القيود: لدينا نوعين من القيود: قيود العرض وقيود الطلب.

قيود العرض: $\sum_{j=1}^{m} Q_{ij} = a_i$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 240$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 160$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 260$$

قيود الطلب: $\sum_{j=1}^{n} D_{ij} = b_i$

$$x11 + x21 + x31 = 120$$
$$x12 + x22 + x23 = 130$$
$$x13 + x23 + x33 = 145$$
$$x14 + x24 + x34 = 125$$
$$x15 + x25 + x35 = 140$$

قيود عدم سلبية المتغيرات: $x_{ij} \geq 0$

III.طرق حل مسائل النقل

يقصد بحل مسائل النقل إيجاد قيم متغيرات الأساس xij المجهولة، لذلك فإن الأسلوب الرياضي لحل هذه المسائل يمر بمرحلتين أساسيتين هما: إيجاد الحل الابتدائي الممكن والتي تتضمن ثلاث طرق وهي: طريقة الزاوية الشمالية الغربية، طريقة التكاليف الدنيا، طريقة فوجل التقريبية، ثم تحسين الحل الابتدائي في المرحلة الثانية وتتضمن هذه المرحلة هي الأخرى طريقتين هما: طريقة المسار المتعرج وطريقة عوامل الضرب.

1. طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

يقصد بها أول خانة في الجدول إلى الأعلى وإلى اليسار، وهي الخلية التي ينطلق منها إيجاد الحل الأساسي الأول، ويتم ذلك بإتباع المنهجية التالية وبالتطبيق على المثال السابق:

أول خلية موافقة لمركز الإنتاج الأول ومركز التوزيع الأول (أعلى إلى اليسار)، نجد أن طلب مركز التوزيع D1 هو 120 وحدة، بينما حجم العرض O1 هو 240 وحدة، فيحصل D1 على كافة طلبه 120 وحدة من D1، ويتشبع بذلك العمود الأول (D1)، ويتبقى لمركز الإنتاج O1 كمية تقدر بـ 120 وحدة.

بالانتقال إلى الخلية المقابلة والموافقة لمركز الإنتاج O1، ومركز التوزيع D2، تقدر الكمية المعروضة بـــ 120 وحدة وهي الكمية المتبقية بعد التوزيع الأول، وحجم الطلب 130 وحدة، وعليه ستوجه كل الكمية المعروضة من O_1 إلى D_2، فيتشبع السطر الأول، ويبقى طلب D_2 هو 10 وحدات ينبغي على O_2 تلبيته، وهكذا. خطوات هذه الطريقة يلخصها الجدول أدناه:

الجدول رقم 24: حل مسألة النقل بطريقة الزاوية الشمالية الغربية للمثال 01-01

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
O_1	100 **120**	800 **120**	100 /	500 /	400 /	240 120
O_2	500 /	500 **10**	300 **145**	600 **5**	700 /	160 150 5
O_3	200 /	900 /	500 /	900 **120**	800 **140**	260 140
b_i	120	130 10	145	125 120	140	660

وبذلك نحصل على جدول الحل الأساسي الأول، والذي نجد فيه:

$x_{11}=120$: أي أن O_1 يقوم بتموين D_1 بمقدار 120 وحدة بتكلفة تقدر بــ 100 وحدة؛

$x_{12}=120$: أي أن O_1 يقوم بتموين D_2 بمقدار 120 وحدة بتكلفة تقدر بــ 800 وحدة؛

$x_{22}=10$: أي أن O_2 يقوم بتموين D_2 بمقدار 10 وحدات بتكلفة تقدر بــ 500 وحدة؛

$x_{23}=145$: أي أن O_2 يقوم بتموين D_3 بمقدار 145 وحدة بتكلفة تقدر بــ 300 وحدة؛

$x_{24}=5$: أي أن O_2 يقوم بتموين D_4 بمقدار 5 وحدات بتكلفة تقدر بــ 600 وحدة؛

$x_{34}=120$: أي أن O_3 يقوم بتموين D_4 بمقدار 120 وحدة بتكلفة تقدر بــ 900 وحدة؛

$x_{35}=140$: أي أن O_3 يقوم بتموين D_5 بمقدار 140 وحدة بتكلفة تقدر بــ 800 وحدة؛

يتم حساب التكلفة الكلية وفق هذه الطريقة عن طريق ضرب قيمة التكلفة الوحدوية في كمية الإنتاج لكافة مراكز الإنتاج والتوزيع، أي:

$$Z=(100\times120)+(800\times120)+(500\times10)+(300\times145)+(600\times5)+(900\times120)+(800\times140)=379500$$

عدد المتغيرات الداخلة في الحل (عدد الخلايا المملوءة) = عدد الأسطر (m)+عدد الأعمدة (n) – 1

2. طريقة التكاليف الدنيا:

تختلف هذه الطريقة عن سابقتها في إيجاد الحل الأساسي الأول، حيث أننا في هذه الطريقة نبدأ بتشبيع الخلايا انطلاقا من أدنى تكلفة في الجدول، ثم التكلفة المساوية أو الموالية وهكذا، حتى يتم استيفاء كل العرض والطلب، بحيث نحصل على عدد متغيرات داخلة في الحل يساوي (m+n-1).

وبالعودة إلى مثالنا السابق، يمكن تطبيق هذه الطريقة كما يلي:

- نلاحظ أن أدنى تكلفة في الجدول هي 100، أي إما نقل المنتج من المنبع الأول O_1 إلى المصب الأول D_1 أو من المنبع الأول O_1 إلى المصب الثالث D_3، وطريقة الاختيار هنا تعتمد على أكبر قدر من الطلب، فلو تمت مقارنة طلب كل من المصب الأول والثاني، فإن المؤسسة حتما سوف تختار الطلب الأكبر لتصريف أكبر قدر من منتجاتها، لذلك يتم إشباع طلب المصب الثالث كليا من المنبع الأول؛
- أما التكلفة الموالية فهي 100، أي نقل المنتج من المنبع الأول O_1 إلى المصب الأولD_1 ، حيث يتم تزويده بـ 95 وحدة المتبقية من 240 وحدة بعد التوزيع، وبذلك يتشبع السطر الأول، أي أن الكمية المعروضة في المنبع الأول 0؛
- أما التكلفة الموالية فهي 200، وهي تكلفة نقل المنتج من المنبع الثالث O_3 إلى المصب الأولD_1 ، وهنا يتم تزويد هذا الأخير بـــ 25 وحدة فقط وهي احتياجاته بعد حصوله على 95 وحدة من المنبع الأول، وبالتالي يتشبع العمود الأول، وهكذا يتم الانتقال بين الخلايا تصاعديا، كما في الجدول أدناه:

الجدول رقم 25: حل مسألة النقل بطريقة التكاليف الدنيا للمثال 01-01

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
O_1	100 **95**	800 /	100 **145**	500 /	400 /	240 95
O_2	500 /	500 **130**	300 /	600 **30**	700 /	160 30
O_3	200 **25**	900 /	500 /	900 **95**	800 **140**	260 235 95
b_i	120 25	130	145	125 95	140	660

قيمة التكاليف وفق هذه الطريقة هي:

$$Z=(100\times95)+(100\times145)+(500\times130)+(600\times30)+(200\times25)+(900\times95)+(800\times140)=309500$$

3. طريقة فوجل:

تعتبر طريقة فوجل التقريبية (طرقة الفروقات العظمى) من أهم الطرق الثلاث على الإطلاق لما تتميز به هذه الطريقة من القدرة على الوصول للحل الأمثل أو الحل القريب من الأمثل، ونادرا ما تكون طريقة التكلفة الدنيا وطريقة الزاوية الشمالية الغربية أفضل من طريقة فوجل، إلا أنها تحتاج إلى عمليات حسابية أطول مما تحتاجه الطريقتين السابقتين. وتتلخص خطوات إيجاد الحل الابتدائي لهذه الطريقة كما يلي:

- حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف وفي كل عمود؛
- تحديد الصف أو العمود الذي يمتلك أكبر فرق التكلفة (أعلى جزاء)؛
- اختيار الخلية ذات التكلفة الأقل في ذلك الصف أو العمود؛
- في الخلية التي اختيرت في الخلية الثالثة، نقارن احتياجات المصب مع ما هو متوفر في المنبع لنأخذ القيمة الأقل؛
- نعيد حساب الفرق مرة أخرى لكل من الأعمدة والصفوف، وذلك بعد إلغاء العمود أو السطر المشبع، وتكرر العملية السابقة إلى أن نلبي احتياجات كل المصبات من المنابع المتاحة.

وبالعودة إلى مثالنا السابق، سنقوم بتطبيق مراحل هذه الطريقة، وفق المراحل التالية:

- نقوم بحساب الفرق بين أدنى تكلفتين على مستوى جميع الأسطر والأعمدة فنحصل على القيم: (100-100=0، 300-500=200، 500-200=300) على مستوى الأسطر الثلاث، ونحصل على القيم: (200-100=100، 800-500=300، 300-100=200، 600-500=100، 700-400=300) على مستوى الأعمدة؛
- نقوم باختيار أكبر فرق بين الأعمدة والأسطر، نلاحظ في هذا المثال أن 300 هي أكبر فرق وقد تكررت في السطر الأخير والعمودين الثاني والخامس، وهنا يتم اختيار أكبر فرق بينها والذي يوافق أدنى تكلفة، وهو السطر الثالث والذي يوافق 200 التي تعبر عن أدنى تكلفة في الجدول؛
- تعبر الخلية 200 عن تكلفة تزويد المصب الأول بالمنتج من المنبع الثالث، لذلك يتم تزويد طلبه المتمثل في 120 وحدة من 260 وحدة (عرض المنبع الثالث)، وبذلك يتم إشباع المصب الأول (العمود الأول)، ويتبقى للمنبع الثالث كمية معروضة تقدر بـــ 140 وحدة؛
- وهكذا يتم إلغاء العمود الأول من جدول النقل لكونه مشبعا، ويتم تحيين (*actualisation*) الجدول بإعادة حساب الفرق بين التكاليف المتبقية، فنحصل على القيم: 300، 200، 300 في الأسطر الثلاث، وتبقى القيم: 300، 200، 100، 300 في الأعمدة الأربعة المتبقية، نقوم باختيار أكبر فرق (300) والذي يوافق أدنى تكلفة (100)؛

- تمثل الخلية 100 عن تكلفة نقل المنتجات من المنبع الأول إلى المصب الثالث، لذلك يتم تزويد هذا الأخير بكل طلبه المتمثل في 145 وحدة من أصل 240 وحدة معروضة لدى المنبع الأول، وهكذا يتم إشباع العمود الثاني، وإلغاؤه، ويبقى للمنبع الأول كمية معروض تقدر بـــ 95وحدة؛
- وبإتباع نفس الخطوات في كل مرة، نحصل على النتائج المبينة في الجدول أدناه:

الجدول رقم 27: حل مسألة النقل بطريقة فوجل للمثال 01-01

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i	الفرق
O_1	100 /	800 /	100 **145**	500 /	400 **95**	240 95	0 300 100
O_2	500 /	500 **130**	300 /	600 **30**	700 /	160 30	200 200 100
O_3	200 **120**	009 /	500 /	900 **95**	800 **45**	260 140	300 300 100
b_i	120	130	145	125 95	140 45	660	
الفرق	100	300 400	200	100 300	300 100		

انطلاقا من الجدول أعلاه أنه تم ملئ جميع الخانات، لذلك نتوقف عن تطبيق طريقة *Vogel*، وعليه تم الحصول على حل الأساس المقبول:

- **متغيرات الأساس الموجبة: وعددها 07= (m+n-1)**

$x_{13}=145,\quad x_{15}=95,\quad x_{22}=130,\quad x_{24}=30,\quad x_{31}=120,\quad x_{34}=95,\quad x_{35}=45$

- **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** وتمثل باقي متغيرات الأساس.

بعدها نقوم بتعويض قيم متغيرات الأساس على مستوى القيود الهيكلية للتحقق منها.

وبغرض الحصول على قيمة دالة الهدف نقوم أيضا بتعويض قيم متغيرات الأساس في دالة هدف نموذج النقل، فنحصل على:

$$Z = 100(0)+800(0)+100(145)+500(0)+400(95)+500(0)+500(130)+300(0)+600(30)+700(0)+200(120)+900(0)+500(0)+900(95)+800(45)=281000$$

قيمة دالة الهدف المحصل عليها باستخدام طريقة Vogel (281000) أقل من التكلفة الإجمالية للنقل المحصل عليها بطريقة التكاليف الدنيا (309500)، وأقل أيضا من التكلفة الإجمالية المحصل عليها بطريقة الزاوية الشمالية الغربية (379500).

ملاحظة: في حالة النموذج غير المتوازن أي في حالة عدم تساوي العرض والطلب فإنه تتم إضافة الكمية المعروضة (في حالة العرض أقل من الطلب) في سطر جديد بتكاليف معدومة، أو إضافة الكمية المطلوبة في عمود جديد (في حالة الطلب أقل من العرض) في عمود جديد بتكاليف معدومة.

IV.تحسين الحل الابتدائي

وتتضمن هذه المرحلة طريقتين هما: **طريقة المسار المتعرج وطريقة عوامل الضرب.**

1. طريقة المسار المتعرج:

يتم في هذه الطريقة اختبار الخلايا الفارغة الموجودة في مصفوفة الحل الابتدائي الذي تم التوصل إليه بإحدى الطرق السابقة، والمقصود بالخلايا الفارغة تلك المربعات الموجودة في المصفوفة والتي لم يتم النقل إليها، أي التي تحتوي على $X_{ij} = 0$، ويمكن تلخيص هذه الطريقة في الخطوات التالية:

- يتم تحديد ورسم مسارات الخلايا الفارغة؛
- يتم حساب القيم الجبرية للخلايا الفارغة؛
- يتم اختيار الخلية الفارغة التي تحمل القيمة الجبرية الأشد سلبية وتتم دراسة مسارها، وذلك بأخذ مسار مغلق (إشارته بالتناوب +، -، + ...) ويتم اختيار أصغر قيمة من بين الزوايا التي تحمل الإشارة (-)؛
- تكرر هذه العمليات إلى غاية الوصول إلى قيم جبرية للخلايا تكون موجبة أو مساوية للصفر والذي يعني الوصول إلى الحل الأمثل.

ملاحظة: المسار ينطلق من الخلية الفارغة مرورا بالخلايا المملوءة وبخطوط مستقيمة مشكلة زوايا قائمة وصولا إلى نفس الخلية.

مثال 02-01: ليكن لدينا نموذج النقل التالي:

الجدول رقم 28: مسألة النقل للمثال 02-01

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2 x_{11}	5 x_{12}	3 x_{13}	1 x_{14}	90
O_2	3 x_{21}	1 x_{22}	2 x_{23}	4 x_{24}	80
O_3	4 x_{31}	2 x_{32}	1 x_{33}	5 x_{34}	70
b_i	40	50	110	40	240

أولا: سنقوم بحل هذا المثال باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية للحصول على الحل الابتدائي ومن ثم تحسين الحل باستخدام المسار المتعرج.

الجدول رقم 29: حل مسألة النقل باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية للمثال 02-01

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2 40	5 50	3 /	1 /	90 50 0
O_2	3 /	1 /	2 80	4 /	80 0
O_3	4 /	2 /	1 30	5 40	70 40 0
b_i	40 0	50 0	110 30 0	40 0	240

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

$$Z = 2\ (40)+5\ (50)+2\ (80)+1\ (30)+5\ (40) = 720$$

ثانيا: سنقوم بتحسين الحل الابتدائي، ولكن قبل ذلك ينبغي علينا التأكد من عدد الخلايا المملوءة.

عدد الخلايا المملوءة يساوي 5، وهذا لا يساوي $6=1-3+4=(m+n-1)$، لهذا نضيف لخلية مملوءة كمية معدومة مساوية للصفر، كما يلي:

الجدول رقم 30: حل مسألة النقل باستخدام طريقة المسار المتعرج للمثال 02-01

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2 40	5 50	3 /	1 /	90
O_2	3 /	1 0	2 80	4 /	80
O_3	4 /	2 /	1 30	5 40	70
b_i	40	50	110	40	240

وبذلك نتحصل على خلايا 6 خلايا غير مملوءة يتم حساب قيمها الجبرية كما يلي:

الجدول رقم 31: حل مسألة النقل باستخدام طريقة المسار المتعرج للمثال 02-01

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2 40	5 50	3 /	1 /	90
O_2	3 /	1 0	2 80	4 /	80
O_3	4 /	2 /	1 30	5 40	70
b_i	40	50	110	40	240

$x_{13} = 3 - 5 + 1 - 2 = -3$

$x_{14} = 1 - 5 + 1 - 2 + 1 - 5 = -9$

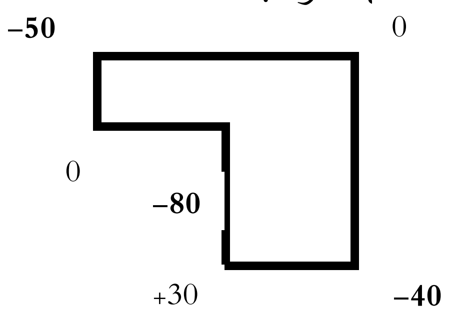
$x_{21} = 3 - 2 + 5 - 1 = 5$

$x_{24} = 4 - 5 + 1 - 2 = -2$

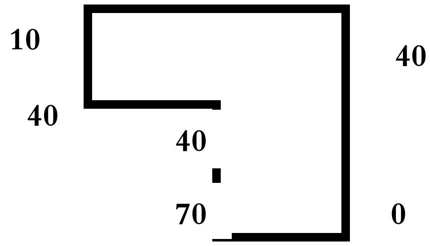
$x_{31} = 4 - 2 + 5 - 1 + 2 - 1 = 7$

$x_{32} = 2 - 1 + 2 - 1 = 2$

بالنظر إلى القيم الجبرية نلاحظ أن الخلية x_{14} هي الأشد سالبية حيث تمكّن من تخفيض التكاليف بمقدار 9 لكل وحدة منقولة عبرها، وبالتالي سندرس مسارها:



بما أن أقل كمية هي 40=(min : 40, 80, 50)، إذا ستأخذ الخلية x14 الفارغة هذه القيمة ويصبح المسار كالتالي:



وعليه يصبح جدول النقل كالتالي:

الجدول رقم 32: تحسين الحل باستخدام طريقة المسار المتعرج للمثال 02-01

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2 40	5 10	3 /	1 /	90
O_2	3 /	1 40	2 80	4 /	80
O_3	4 /	2 /	1 70	5 0	70
b_i	40	50	110	40	240

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

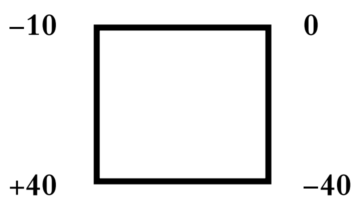
Z =2 (40)+5 (10)+1 (40)+1 (80)+1 (70) +5 (0) = 360

نلاحظ في هذه الحالة أننا وفرنا 360 وحدة نقدية (720 – 360 = 360).

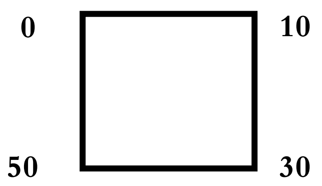
يتم تكرار العملية السابقة لاختيار الخلايا الفارغة بعد التأكد من أن عدد الخلايا المملوءة هي: $(m+n-1)$

x13 = 3 – 5 + 1 – 2 = - 3
x21 = 3 – 2 + 5 – 1 = 5
x24 = 4 – 1 + 5 – 1 = 7
x31 = 4 – 1 + 2 – 1 + 5 – 2 = 7
x32 = 2 – 1 + 2 – 1 = 2
x34 = 5 – 1 + 5 – 1+ 2 – 1 = 9

نلاحظ أن الخلية x_{13} ستساهم في تخفيض التكاليف بمقدار (-3) لكل وحدة منقولة، وعليه يجب دراسة مسارها.



بما أن أقل قيمة هي $10=(min : 40, 10)$، إذا ستأخذ الخلية الفارغة x_{13} هذه القيمة ويصبح المسار كالتالي:



وعليه يصبح جدول النقل كالتالي:

الجدول رقم 33: تحسين الحل باستخدام طريقة المسار المتعرج للمثال 02-01

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2 40	5 /	3 10	1 40	90
O_2	3 /	1 50	2 30	4 /	80
O_3	4 /	2 /	1 70	5 /	70
b_i	40	50	110	40	240

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

$$Z = 2\ (40)+5\ (10)+3\ (10)+1\ (40)+1\ (50)\ +2\ (30)\ +1\ (70) = 330$$

نلاحظ في هذه الحالة أننا وفرنا 30 وحدة نقدية (360 – 330 = 30).

يتم تكرار العملية السابقة لاختيار الخلايا الفارغة بعد التأكد من أن عدد الخلايا المملوءة هي: (m+n-1)

$x_{12} = 5 - 3 + 2 - 1 = 3$
$x_{21} = 3 - 2 + 3 - 2 = 2$
$x_{24} = 4 - 1 + 3 - 1 = 4$
$x_{31} = 4 - 1 + 3 - 2 = 4$
$x_{32} = 2 - 1 + 2 - 1 = 2$
$x_{34} = 5 - 1 + 3 - 1= 6$

نلاحظ أن جميع القيم الجبرية موجبة، مما يعني أن الحل المتوصل إليه هو الحل الأمثل، وعليه فإن تكلفة النقل في هذه الحالة تساوي 330 و.ن.

2. **طريقة عوامل الضرب (التوزيع المعدل):**

تستخدم هذه الطريقة لاختبار أمثلية الحل الأولي، وهي أكفأ من سابقتها، والتي تعتمد على تكوين مسارات مغلقة للمتغيرات غير الأساسية ومن ثم إيجاد المتغير غير الأساسي الذي يساهم في تقليل مجموع تكاليف النقل، أما هذه الطريقة فهي قادرة على تحديد المتغير غير الأساسي الذي يساهم في تقليل مجموع تكاليف النقل مباشرة، وتتلخص هذه الطريقة فيما يلي:

- نرمز لكل سطر (الوحدة الإنتاجية) بالرمز U_i، ونرمز لكل عمود (مركز التوزيع) بالرمز V_j؛
- كل متغيرة أساسية (الخلايا المملوءة) في جدول النقل تكتب بصيغة المعادلة التالية:

$$C_{ij} = U_i + V_i \quad \text{مع} \quad U_i=0$$

- كل متغيرة غير أساسية (الخلايا الفارغة) في جدول النقل تكتب بصيغة المعادلة التالية:

$$C'_{ij} = C_{ij} - V_j - U_i$$

والمطلوب تحديد قيم المجاهيل U_i وV_i.
نختار الخلية الفارغة التي تحمل القيمة الجبرية الأشد سالبية وتتم دراسة مسارها وفقا للقاعدة المعروفة في الطريقة السابقة؛

1. يتم تكرار هذه العملية إلى غاية الوصول إلى قيم جبرية موجبة أو معدومة.

بأخذ نفس المثال السابق، وبعد الوصول إلى الحل المقبول باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية، سنقوم بتحسينه بالاعتماد على طريقة عوامل الضرب، بدءً بتحديد معادلتي الخلايا المملوءة والخلايا الفارغة.

أولا: تحديد معادلة الخلايا المملوءة: $U_i=0$ مع $C_{ij} = U_i + V_i$

$C11 = U1 + V1 \Rightarrow 2 = 0 + V1 \Rightarrow V1 = 2$

$C12 = U1 + V2 \Rightarrow 5 = 0 + V2 \Rightarrow V2 = 5$

$C22 = U2 + V2 \Rightarrow 1 = U2 + 5 \Rightarrow U2 = -4$

$C23 = U2 + V3 \Rightarrow 2 = -4 + V3 \Rightarrow V3 = 6$

$C33 = U3 + V3 \Rightarrow 1 = U3 + 6 \Rightarrow U3 = -5$

$C34 = U3 + V4 \Rightarrow 5 = -5 + V4 \Rightarrow V4 = 10$

ثانيا: تحديد معادلة الخلايا الفارغة: $C'_{ij} = C_{ij} - V_j - U_i$

$C'13 = C13 - V3 - U1 \Rightarrow C'13 = 3 - 6 - 0 \Rightarrow C'13 = -3$

$C'14 = C14 - V4 - U1 \Rightarrow C'14 = 1 - 10 - 0 \Rightarrow C'14 = -9$

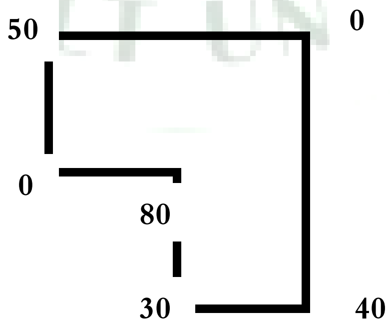
$C'21 = C21 - V1 - U2 \Rightarrow C'21 = 3 - 2 - (-4) \Rightarrow C'21 = 5$

$C'24 = C24 - V4 - U2 \Rightarrow C'24 = 4 - 10 - (-4) \Rightarrow C'24 = -2$

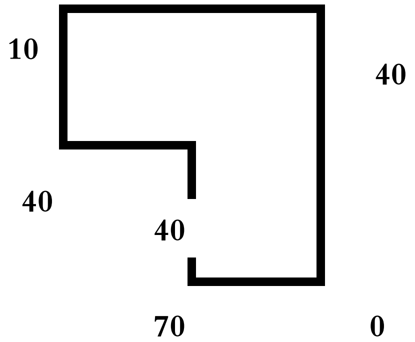
$C'31 = C31 - V1 - U3 \Rightarrow C'31 = 4 - 2 - (-5) \Rightarrow C'31 = 7$

$C'32 = C32 - V2 - U3 \Rightarrow C'32 = 2 - 5 - (-5) \Rightarrow C'32 = 2$

يتم اختيار الخلية x_{14} لأنها تتحمل القيمة الجبرية الأشد سالبية، لذلك ندرس مسارها بنفس الطريقة السابقة:



بما أن أقل قيمة هي 40 =$(min : 40, 80, 50)$، إذا ستأخذ الخلية الفارغة x_{14} هذه القيمة ويصبح المسار كالتالي:



ليصبح جدول النقل كالتالي:

الجدول رقم 34: تحسين الحل باستخدام طريقة عوامل الضرب للمثال 02-01

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2 / 40	5 / 10	3 / /	1 / /	90
O_2	3 / /	1 / 40	2 / 40	4 / /	80
O_3	4 / /	2 / /	1 / 70	5 / 0	70
b_i	40	50	110	40	240

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

Z =2 (40)+5 (10)+ 2 (40)+1 (70) +5 (0) = 360

نلاحظ في هذه الحالة أننا وفرنا 360 وحدة نقدية (720 – 360 = 360).

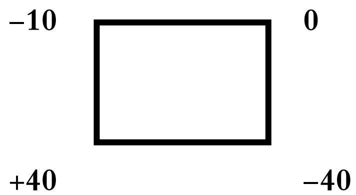
أولا: تحديد معادلة الخلايا المملوءة: $Cij = Ui + Vi$ مع $Ui=0$

$C11 = U1 + V1 \Rightarrow 2 = 0 + V1 \Rightarrow V1 = 2$
$C12 = U1 + V2 \Rightarrow 5 = 0 + V2 \Rightarrow V2 = 5$
$C22 = U2 + V2 \Rightarrow 1 = U2 + 5 \Rightarrow U2 = -4$
$C23 = U2 + V3 \Rightarrow 2 = -4 + V3 \Rightarrow V3 = 6$
$C33 = U3 + V3 \Rightarrow 1 = U3 + 6 \Rightarrow U3 = -5$
$C14 = U1 + V4 \Rightarrow 1 = 0 + V4 \Rightarrow V4 = 1$

ثانيا: تحديد معادلة الخلايا الفارغة: $C'_{ij} = C_{ij} - V_j - U_i$

$C'13 = C13 - V3 - U1 \Rightarrow C'13 = 3 - 6 - 0 \Rightarrow C'13 = -3$
$C'21 = C21 - V1 - U2 \Rightarrow C'21 = 3 - 2 - (-4) \Rightarrow C'21 = 5$
$C'24 = C24 - V4 - U2 \Rightarrow C'24 = 4 - 1 - (-4) \Rightarrow C'24 = 7$
$C'31 = C31 - V1 - U3 \Rightarrow C'31 = 4 - 2 - (-5) \Rightarrow C'31 = 7$
$C'32 = C32 - V2 - U3 \Rightarrow C'32 = 2 - 5 - (-5) \Rightarrow C'32 = 2$
$C'34 = C34 - V4 - U3 \Rightarrow C'34 = 5 - 1 - (-5) \Rightarrow C'34 = 9$

الحل المتوصل إليه ليس أمثلا، لذا نختار الخلية الأشد سالبية وهي الخلية x_{13} والتي تتم دراسة مسارها:



بما أن أقل قيمة هي 10=$(min : 10, 40)$، إذا ستأخذ الخلية الفارغة x_{13} هذه القيمة ويصبح المسار كالتالي:

0	10
50	30

وعليه يصبح جدول النقل كالتالي:

الجدول رقم 35: تحسين الحل باستخدام طريقة عوامل الضرب للمثال 02-01

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2 40	5 /	3 10	1 40	90
O_2	3 /	1 50	2 30	4 /	80
O_3	4	2	1 70	5	70
b_i	40	50	110	40	240

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

$$Z = 2(40)+5(10)+3(10)+1(40)+1(50)+2(30)+1(70) = 330$$

نلاحظ في هذه الحالة أننا وفرنا 30 وحدة نقدية (360 – 330 = 30).

أولا: تحديد معادلة الخلايا المملوءة: $Ui=0$ مع $Cij = Ui + Vi$

$C11 = U1 + V1 \Rightarrow 2 = 0 + V1 \Rightarrow V1 = 2$
$C22 = U2 + V2 \Rightarrow 1 = -1 + V2 \Rightarrow V2 = 2$
$C23 = U2 + V3 \Rightarrow 2 = U2 + 3 \Rightarrow U2 = -1$
$C33 = U3 + V3 \Rightarrow 1 = U3 + 3 \Rightarrow U3 = -2$
$C14 = U1 + V4 \Rightarrow 1 = 0 + V4 \Rightarrow V4 = 1$
$C13 = U1 + V3 \Rightarrow 3 = 0 + V3 \Rightarrow V3 = 3$

ثانيا: تحديد معادلة الخلايا الفارغة: $C'ij = Cij - Vj - Ui$

$C'_{12} = C_{12} - V_2 - U_1 \Rightarrow C'_{12} = 5 - 2 - 0 \Rightarrow C'_{12} = 3$
$C'21 = C21 - V1 - U2 \Rightarrow C'21 = 3 - 2 - (-1) \Rightarrow C'21 = 2$
$C'24 = C24 - V4 - U2 \Rightarrow C'24 = 4 - 1 - (-1) \Rightarrow C'24 = 4$
$C'31 = C31 - V1 - U3 \Rightarrow C'31 = 4 - 2 - (-2) \Rightarrow C'31 = 4$
$C'32 = C32 - V2 - U3 \Rightarrow C'32 = 2 - 2 - (-2) \Rightarrow C'32 = 2$
$C'_{34} = C_{34} - V_4 - U_3 \Rightarrow C'_{34} = 5 - 1 - (-2) \Rightarrow C'_{34} = 6$

نلاحظ أن جميع القيم الجبرية للخلايا الفارغة موجبة، مما يعني الوصول إلى الحل الأمثل، وعليه فإن تكلفة النقل المحصل عليها تساوي 330 و.ن.

V. ملخص خوارزمية حل مسائل النقل:

يمكن تلخيص خوارزمية حل مسائل النقل في الخطوات التالية:

أ. بناء جدول الحل الأساسي الأول بحيث:

- تظهر فيه تكاليف النقل من كل منبع إلى كل مصب؛
- كميات عرض كل منبع، وكميات طلب كل مصب، بحيث يتساوى مجموع العرض مع مجموع الطلب؛

ب. **إيجاد الحل الأساسي الأول، بإحدى الطرق: الزاوية الشمالية الغربية، التكاليف الدنيا أو طريقة فوجل.**

- يجب أن يكون عدد الخلايا الداخلة في الحل محققا للشرط m+n-1.
- نختبر الحل إذا كان أمثلا أم لا، وذلك إما بطريقة المسار المتعرج أو طريقة التوزيع المعدل؛
- نكون أمام الحل الأمثل إذا كان كل: $C'ij = Cij - Vj - Ui \geq 0$؛
- إذا كان الحل غير أمثل فنقوم بتحسينه، ثم نعود من جديد للخطوة السابقة، أما إن كان أمثلا فنقوم بشرحه.

VI. مسائل النقل في حالة التعظيم:

لا تقتصر استخدامات مسائل النقل على حالة التدنية، وإنما يتعدى ذلك إلى حالة التعظيم أيضا وهي الحالة التي يتم فيها البحث عن أعظم ربح أو عائد في وجود نفس الشروط، فيتم استبدال تكاليف نقل الوحدة الواحدة بالربح المحصل عليه من نقل الوحدة الواحدة. وتختلف هذه الحالة عن سابقتها في النقاط التالية:

- عند استخدام طريقة التكلفة كان يتم اختيار أقل تكلفة بهدف تخفيض التكاليف، أما في حالة الأرباح فيتم اختيار أكبر خلية في الجدول لنبدأ الحل بها، وتسمى هذه الطريقة بطريقة تعظيم الأرباح؛
- عند استخدام طريقة فوجل التقريبية كان يتم حساب الفرق بين أصغر تكلفتين لكل سطر وعمود وذلك بهدف تخفيض التكاليف، أما في حالة التعظيم فيتم حساب الفرق بين أكبر رقمين لكل سطر وعمود ويلي ذلك اختيار أكبر فرق، ليتم بعدها تحديد الخلية الكبرى؛
- عند استخدام طرق تحسين الحل يتم تقييم واختيار الخلية التي تحمل أكبر قيمة موجبة؛
- الحل الأمثل يكون عند الحصول على قيم جبرية سالبة أو معدومة للخلايا الفارغة.

مثال 02-02: لتكن لدينا المعطيات التالية عن مؤسسة إنتاجية، تحتوي على 3 مصانع و3 مخازن:

المصانع	عدد الوحدات	تكلفة الإنتاج	تكلفة النقل		
			D_1	D_2	D_3
O_1	2000	200	60	80	50
O_2	2500	280	100	30	100
O_3	1800	300	80	120	70

إذا كان عدد الوحدات المطلوبة للمخازن هو على التوالي كالتالي: 1600، 2400 و2000 وحدة، وإذا كان السعر الوحدوي في المخازن الثلاث هو على التوالي كالتالي: 450 و.ن، 240 و.ن، 400 و.ن.

المطلوب: تحديد عدد الوحدات الواجب نقلها من كل مصنع إلى كل مخزن بشرط تحقيق أعظم ربح.

تشكيل جدول النقل:

الجدول رقم 36: تشكيل جدول النقل للمثال 02-02

	D_1	D_2	D_3	a_i
O_1	11	12	13	2000
O_2	21	22	23	2500
O_3	31	32	33	1800
b_i	1600	2400	2000	6300 6000

ما يلاحظ من الجدول أعلاه أن النموذج غير متوازن، ما يستوجب إضافة عمود آخر وهمي للطلب، فيصبح جدول النقل كالتالي:

الجدول رقم 37: تشكيل جدول النقل للمثال 02-02

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	11	12	13	0	2000
O_2	21	22	23	0	2500
O_3	31	32	33	0	1800
b_i	1600	2400	2000	300	6300 6300

بما أننا في هذه الحالة بصدد تعظيم الأرباح فسنقوم بحساب الأرباح الوحدوية والتي نرمز لها بالرمز p_{ij} حيث:

الربح = سعر البيع الوحدوي – التكاليف الوحدوية الكلية (و في حالة وجود خسارة تُشطب الخلية)؛
التكاليف الوحدوية الكلية = تكاليف الإنتاج الوحدوية + تكاليف النقل الوحدوية.
التكاليف الوحدوية الكلية:

$$\begin{array}{c} O_1 \\ O_2 \\ O_3 \end{array}\begin{pmatrix} (200+60) & (200+80) & (200+50) \\ (280+100) & (280+30) & (280+100) \\ (300+80) & (300+120) & (300+70) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 260 & 280 & 250 \\ 380 & 310 & 380 \\ 380 & 420 & 370 \end{pmatrix}$$

الربح الوحدوي:

$$\begin{array}{c} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{array}\begin{pmatrix} (450-260) & (420-280) & (400+250) \\ (450-380) & (420-310) & (400+380) \\ (450-380) & (420-420) & (400+370) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 190 & 140 & 150 \\ 70 & 110 & 20 \\ 70 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

وعليه يصبح جدول النقل كالتالي:

الجدول رقم 38: تشكيل جدول النقل للمثال 02-02

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	190	140	150	0	2000
O_2	70	110	20	0	2500
O_3	70	0	30	0	1800
b_i	1600	2400	2000	300	6300 6300

إيجاد الحل الابتدائي الأساس باستخدام طريقة الربح الأعظم:

الجدول رقم 39: الحل الابتدائي الأساس باستخدام طريقة الربح الأعظم للمثال 02-02

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	190 1600	140 /	150 400	0 /	2000
O_2	70 /	110 2400	20 /	0 100	2500
O_3	70 /	0 /	30 1600	0 200	1800
b_i	1600	2400	2000	300	6300 6300

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

$$Z = 190\ (1600) + 150\ (400) + 110\ (2400) + 0\ (100) + 30\ (1600) + 0\ (200) = 676000$$

عدد الخلايا المملوءة $m+n-1 = 6$.

تحسين الحل الابتدائي (استخدام طريقة المسار الحرج):

تحديد الخلايا الفارغة: x_{12} , x_{14} , x_{21} , x_{23} , x_{31} , x_{32}

حساب القيم الفارغة للخلايا الفارغة:

$x_{12} = 140 – 150 + 30 – 0 + 0 – 110 = - 90$
$x_{14} = 0 – 0 + 30 – 150 = -120$
$x_{21} = 70 – 190 + 150 – 30 + 0 – 0 = 0$
$x_{23} = 20 – 30 + 0 – 0 = -10$
$x_{31} = 70 – 190 + 150 – 30 = 0$
$x_{32} = 0 – 110 + 0 – 0 = -110$

نلاحظ أن جميع القيم الجبرية للخلايا الفارغة سالبة مما يعني الوصول إلى الحل الأمثل الذي يعظم الأرباح.

VII. تمثيل مسائل النقل بنظرية الشبكة:

يهتم أسلوب شبكات النقل بحل كثير من المسائل الاقتصادية والتقنية منها، خاصة مسائل نقل المسافرين والبضائع أو نقل وتوزيع مختلف المواد، ومن أجل معالجة مختلف الجوانب المتعلقة بهذه المسائل نلجأ إلى استخدام تقنية الشبكات.
من بين تطبيقات نظرية شبكات النقل يمكن ذكر مسائل البحث عن المسارات ذات القيمة المثلى ، مسألة التدفق الأعظم عبر الشبكة مسألة المسافر التجاري وغيرها.

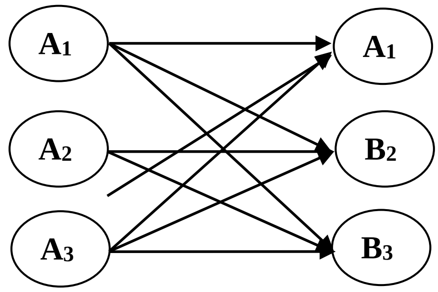
1. **الشبكة:** هو هيكل يحتوي على مجموعة من العناصر تسمى بالرؤوس ومجموعة أخرى من العناصر تسمى بالأقواس ويرمز للشبكة بالرمز U(X) تمثل الرؤوس على الرسم بنقاط والأسهم بأقواس. وتنقسم الشبكات إلى:
   - ☑ **الشبكة الكاملة:** هو هيكل يكون فيه أي رأس من الرؤوس مرتبط بكل من الرؤوس الأخرى على مرة واحدة.
   - ☑ **الشبكة الموجهة:** هي هيكل يتكون من رؤوس تربطها أسهم موجهة، بمعنى أن السير فيها يخضع لاتجاه الأسهم.
   - ☑ **الشبكة غير الموجهة:** هي هيكل يتكون من رؤوس تربطها أسهم غير موجهة، في هذا النوع من الشبكات يسمى السهم الذي يربط أي رأسين "بالحد".
2. **المسار:** في أي شبكة نسمي مسارا كل سلسلة متصلة من الأسهم التي يكون فيها الطرف النهائي لكل منها هو عبارة عن الطرف الابتدائي للسهم الذي يليه، ما عدا السهم الأخير.

في مسائل النقل يمكن التمييز بين أنواع مختلفة من مسارات النقل التي تربط بين مراكز التوزيع ومراكز الاستلام وذلك على أساس الاعتبارين التاليين:

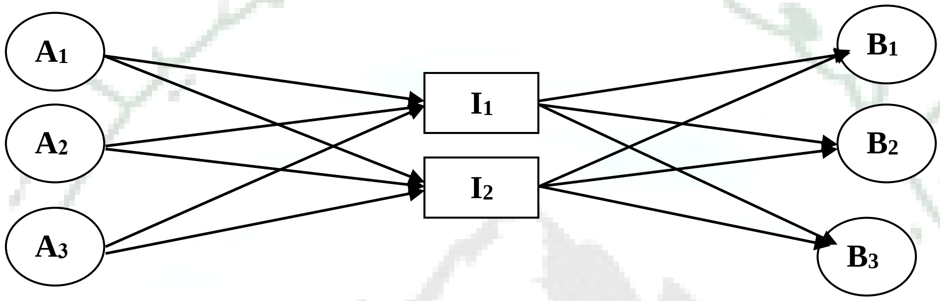
الاعتبار الأول: عدد مراحل النقل (مسارات النقل ذات المرحلة الواحدة، مسارات النقل متعددة المراحل)؛
الاعتبار الثاني: توازن كمية العرض مع كمية الطلب، ما يسمى بالنقل المغلق والنقل المفتوح، ففي حالة النقل المغلق يكون التوازن موجوداً، أما في حالة النقل المفتوح فلا يتحقق التوازن، مما يجعلنا نفكر في إدخال مركز استلام أو مركز توزيع وهمي.

والأشكال أدناه توضح أنواع المسارات:

الشكل رقم 05: مسارات نقل ذات مرحلة واحدة



الشكل رقم 06: مسارات نقل ذات مراحل متعددة



3. **الحلقة:** المسار الذي يكون فيه الطرف النهائي للسهم الأخير هو عبارة عن الطرف الابتدائي للسهم الأول، يسمى بالمسار المغلق أو الحلقة. طول أي مسار هو عبارة عن مجموع القيم التي تعبر عنها الأسهم المشكلة وتسمى عادة بالقيم المرافقة.

ولذلك توجد عدة طرق تستعمل من أجل استخراج قيمة المسار ذو القيمة الأصغر، من بينها: طريقة Ford، طريقة R.BELLMAN، طريقة G.DANTZIG، طريقة المصفوفات (FLOYD).

4. تمارين محلولة:

التمرين الأول:

الجدول أدناه يقدم تكاليف النقل الوحدوية لنقل منتج معين من 03 مراكز إنتاج إلى 04 مراكز توزيع، بالإضافة إلى عرض كل مركز إنتاج وطلب كل مركز توزيع.

	D_1	D_2	D_3	D_4	A_i
O_1	12	13	04	06	500
O_2	06	04	10	11	700
O_3	10	09	12	04	800
b_i	400	900	200	500	

المطلوب:1- انطلاقا من معطيات مسألة النقل أعلاه شكِّل جدول النقل الموافق لهذه المسألة؛

2- قدم نموذج النقل الموافق لجدول النقل المتوصل إليه؛

3- أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية، وكذا قيمة دالة الهدف الموافقة له؛

4- أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة التكاليف الدنيا، وكذا قيمة دالة الهدف الموافقة له؛

5- أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة فوجل، وكذا قيمة دالة الهدف الموافقة له.

حل التمرين الأول:

1- تشكيل جدول النقل:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	12 X_{11}	13 X_{12}	04 X_{13}	06 X_{14}	500
O_2	06 X_{21}	04 X_{22}	10 X_{23}	11 X_{24}	700
O_3	10 X_{31}	09 X_{32}	12 X_{33}	04 X_{34}	800
b_i	400	900	200	500	2000

2- **صياغة نموذج النقل:**

MinZ=12x11+13x12+4x13+6x14+6x21+4x22+10x23+11x24+10x31+9x32+12x33+4x34

قيود العرض:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 500$
$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 700$
$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 800$

قيود الطلب:

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 400$
x12 + x22 + x23 = 900
x13 + x23 + x33 = 200
x14 + x24 + x34 = 500

قيود عدم سلبية المتغيرات: $x_{ij} \geq 0$

3- **إيجاد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية:**

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	12 400	13 100	04 /	06 /	500
O_2	06 /	04 700	10 /	11 /	700
O_3	10 /	09 100	12 200	04 500	800
b_i	400	900	200	500	2000

Min Z =12 (400)+13 (100)+4 (0)+6 (0) +6 (0)+4 (700)+10 (0)+11 (0) +10 (0)+9 (100)+12 (200)+4 (500) = 14200

4- إيجاد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة التكاليف الدنيا:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	12 300	13 /	04 200	06 /	500
O_2	06 /	04 700	10 /	11 /	700
O_3	10 100	09 200	12 /	04 500	800
b_i	400	900	200	500	2000

Min Z =12 (300)+13 (0)+4 (200)+6 (0) +6 (0)+4 (700)+10 (0)+11 (0) +10 (100)+9 (200)+12 (0)+4 (500) = 10400

5- **إيجاد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة فوجل:**

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i	الفرق
O_1	12 /	13 /	04 **200**	06 **300**	500 300 0	2 6
O_2	06 /	04	10 /	11 /	700 0	2 2 2
O_3	10 **400**	09 **200**	12 /	04 **002**	800 600 400	5 5 1
b_i	400 0	900 200 0	200 0	500 200 0	2000	
الفرق	4 4 4	5 5 5	6	2 2 7		

Min Z =12 (0)+13 (0)+4 (200)+6 (300) +6 (0)+4 (700)+10 (0)+11 (0) +10 (400)+9 (200)+12 (0)+4 (200) = 12000

التمرين الثاني:

الجدول أدناه يقدم معطيات لمسألة نقل ما.

	D_1	D_2	D_3	D_4	A_i
O_1	20	17	15	10	130
O_2	16	14	18	13	50
O_3	12	15	11	19	100
b_i	40	40	80	120	

المطلوب:1- انطلاقا من معطيات مسألة النقل أعلاه شكِّل جدول النقل الموافق لهذه المسألة؛

2- أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة التكاليف الدنيا؛

3- أوجد الحل الأمثل لنموذج النقل المتوصل إليه باستخدام طريقة عوامل الضرب.

حل التمرين الثاني:

1- تشكيل جدول النقل:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	20 X_{11}	17 X_{12}	15 X_{13}	10 X_{14}	130
O_2	16 X_{21}	14 X_{22}	18 X_{23}	13 X_{24}	50
O_3	12 X_{31}	15 X_{32}	11 X_{33}	19 X_{34}	100
b_i	40	40	80	120	280

2- إيجاد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة التكاليف الدنيا:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	20 **10**	17 /	15 /	10 **120**	**130** **10** **0**
O_2	16 **10**	14 **40**	18 /	13 /	**50** **10** **0**
O_3	12 **20**	15 /	11 **80**	19 /	**100** **20** **0**
b_i	**40** **20** **100**	**40** **0**	**80** **0**	**120** **0**	280

$\text{Min } Z = 20\ (10)+17(0)+15(0)+10\ (120)+16\ (10)+14\ (40)\ +18\ (0)+13\ (0)+12\ (20)+15\ (0)\ +11\ (80)+19\ (0) = 3240$

3- إيجاد الحل الأمثل لنموذج النقل المتوصل إليه:

أولا: تحديد معادلة الخلايا المملوءة: $C_{ij} = U_i + V_i$ مع $U_i=0$

$C_{11} = U_1 + V_1 \Rightarrow 20 = 0 + V_1 \Rightarrow \mathbf{V_1 = 20}$

$C_{14} = U_1 + V_4 \Rightarrow 10 = 0 + V_4 \Rightarrow \mathbf{V_4 = 10}$

$C_{21} = U_2 + V_1 \Rightarrow 16 = U_2 + 20 \Rightarrow \mathbf{U_2 = -4}$

$C_{22} = U_2 + V_2 \Rightarrow 14 = -4 + V_2 \Rightarrow \mathbf{V_2 = 18}$

$C_{31} = U_3 + V_1 \Rightarrow 12 = U_3 + 20 \Rightarrow \mathbf{U_3 = -8}$

$C_{33} = U_3 + V_3 \Rightarrow 11 = -8 + V_3 \Rightarrow \mathbf{V_3 = 19}$

ثانيا: تحديد معادلة الخلايا الفارغة: $C'_{ij} = C_{ij} - V_j - U_i$

$C'_{12} = C_{12} - V_2 - U_1 \Rightarrow C'_{12} = 17 - 18 - 0 \Rightarrow C'_{12} = -1$

$C'13 = C13 - V3 - U1 \Rightarrow C'13 = 15 - 19 - 0 \Rightarrow C'13 = -4$

$C'23 = C23 - V3 - U2 \Rightarrow C'23 = 18 - 19 - (-4) \Rightarrow C'23 = 3$

$C'24 = C24 - V4 - U2 \Rightarrow C'24 = 13 - 10 - (-4) \Rightarrow C'24 = 7$

$C'32 = C32 - V2 - U3 \Rightarrow C'32 = 15 - 18 - (-8) \Rightarrow C'32 = 5$

$C'_{34} = C_{34} - V_4 - U_3 \Rightarrow C'_{34} = 19 - 10 - (-8) \Rightarrow \mathbf{C'_{34} = 17}$

الحل المتوصل إليه ليس أمثلا، لذا نختار الخلية الأشد سالبية وهي الخلية x_{13} والتي تتم دراسة مسارها:

+10	**0**
−20	**+80**

بما أن أقل قيمة هي 10=$(min : 10, 80)$، إذا ستأخذ الخلية الفارغة x_{13} هذه القيمة ويصبح المسار كالتالي:

0	**10**
30	**70**

وعليه يصبح جدول النقل كالتالي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	20 /	17 /	15 **10**	10 **120**	130
O_2	16 **10**	14 **40**	18 /	13 /	50
O_3	12 **30**	15 /	11 **70**	19 /	100
b_i	40	40	80	120	280

Min $Z = 20(0)+17(0)+15(10)+10(120)+16(10)+14(40)+18(0)+13(0)+12(30)+15(0)+11(70)+19(0) = 3200$

أولا: تحديد معادلة الخلايا المملوءة: $U_i=0$ مع $C_{ij} = U_i + V_i$

$C_{13} = U_1 + V_3 \Rightarrow 15 = 0 + V_3 \Rightarrow \mathbf{V_3 = 15}$

$C14 = U1 + V4 \Rightarrow 10 = 0 + V4 \Rightarrow V4 = 10$

$C33 = U3 + V3 \Rightarrow 11 = U2 + 15 \Rightarrow U3 = -4$

$C31 = U3 + V1 \Rightarrow 12 = -4 + V1 \Rightarrow V1 = 16$

$C21 = U2 + V1 \Rightarrow 16 = U2 + 16 \Rightarrow U2 = 0$

$C22 = U2 + V2 \Rightarrow 14 = 0 + V_2 \Rightarrow \mathbf{V_3 = 14}$

ثانيا: تحديد معادلة الخلايا الفارغة: $C'_{ij} = C_{ij} - V_j - U_i$

$C'_{11} = C_{11} - V_1 - U_1 \Rightarrow C'_{11} = 20 - 16 - 0 \Rightarrow \mathbf{C'_{11} = 4}$

$C'12 = C12 - V1 - U2 \Rightarrow C'12 = 17 - 14 - 0 \Rightarrow C'12 = 3$

$C'23 = C23 - V3 - U2 \Rightarrow C'23 = 18 - 15 - (0) \Rightarrow C'23 = 3$

$C'24 = C24 - V4 - U2 \Rightarrow C'24 = 13 - 10 - (0) \Rightarrow C'24 = 3$

$C'32 = C32 - V2 - U3 \Rightarrow C'32 = 15 - 14 - (-4) \Rightarrow C'32 = 5$

$C'34 = C34 - V_4 - U_3 \Rightarrow C'_{34} = 19 - 10 - (-4) \Rightarrow \mathbf{C'_{34} = 13}$

يتضح من أعلاه بأن جميع قيم التكاليف الجديدة موجبة، وعليه فقد تم التوصل إلى الحل الأمثل باستخدام طريقة عوامل الضرب، وبالتالي فإن التكاليف الكلية النهائية تساوي 3200، نجد أننا قد وفرنا 40 وحدة.

المحور التاسع

نمــوذج التخصيص

مقدمة

تعتبـر مشـكلة التخصـيص حالـة خاصـة مـن حـالات أو مشـكلات البرمجـة الخطيـة، مثلهـا فـي ذلك مثـل مشـكلة النقـل، حيـث تتعامـل مـع نـوع خـاص مـن مشاكل البرمجة الخطية. ونظرا لما تتسم به هذه المشكلة من سمات خاصة فإنه يكـون مـن المفضـل تصـميم نموذجـا خاصـا بهـا يسمح بالتوصـل إلـي الحل الأمثـل لهـا فـي أقل وقت وبأقل جهد ممكن .ويهـدف نمـوذج التخصـيص إلـي تخصـيص عـدد معـين مـن المـوارد أو الإمكانيـات (آلات أو عمـال مـثلا) لعـدد مسـاو مـن الغايـات (الاسـتخدامات أو المهـام مـثلا) بصـورة تمكـن مـن تحقيـق أدنـي تكلفـة أو تحقيـق أقصـي ربـح أو أقـل وقـت إنجـاز ممكـن ....الـخ. ويـتم التخصيص علـي أسـاس ربـط كـل مـورد بمهمـة أو اسـتخدام واحـد أ والعكس أي ربط كل مهمة بمورد واحد فقط ويسـتخدم نمـوذج التخصيص فـي كثيـر مـن التطبيقـات العمليـة، ومـن أمثلـة هـذه التطبيقـات مشكلة تخصـيص العـاملين اللازمـين لإنجـاز المهـام المختلفـة بالمنشـأة بمـا يـؤدي إلــي تحقيـق أقـل تكلفـة أو وقـت ممكـن. ومشـكلة إسـناد عقـود مقـاولات محـددة لمقاولين معينين بما يؤدي إلى تحقيق أقل تكلفة أو أقل وقـت. ومشـكلة جدولـة الإنتـاج بالمنشأة بمعني تخصيص كل أمر تشغيل محدد إلى آلة معينة لإنجازه بما يحقق أدني تكلفة كلية للمنشأة أو انجاز العمل في أقل وقت ممكن. ومشكلة توزيع رجال البيع بين المناطق البيعية المختلفة بما يحقق أكبر ربح ممكن للمنشأة.

I. خطوات تطبيق طريقة التخصيص:

تتمثل خطوات حل مشاكل التخصيص وفقا لطريقة التخصيص أو الطريقة المجرية في الخطوات التالية:

1. ترتيب بيانات المشكلة في شكل مصفوفة تسمي بمصفوفة التخصيص
2. إعداد مصفوفة تكاليف الفرصة الضائعة، والتي تمثل الحل المبدئي
3. اختبار مثالية الحل، وفي حالة ما إذا كان الحل الذي يتم اختباره هو الحل الأمثل يتم القيام بالخطوة رقم 5.
4. إذا لم يكـن الحـل الـذي يـتم اختبـاره هـو الحـل الأمثـل يـتم تX2ه بتعـديل مصـفوفة تكـاليف الفرصــة الضـائعة، واعـادة اختبـار المثاليـة حتـى يـتم الوصـول إلـي الحـل الأمثل
5. وضع برنامج التخصيص الأمثل وحساب التكاليف أو الأرباح الكلية.

II. نموذج التخصيص وتخفيض التكاليف:

لتوضـيح تفاصـيل خطـوات تطبيـق نمـوذج التخصـيص يتوجب علينا استخدام المثال التالي :

تمتلـك إحـدى المنشـآت الصـناعية أربـع آلات (X_1,X_2,X_3,X_4) فـي أحـد الأقسـام الإنتاجيـة، وتسـتطيع كـل آلـة أن تصـنع أي أمـر مـن أوامـر التشـغيل (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) الموكل تصنيعها لإدارة هذا القسم الإنتـاجي ولكـن بتكـاليف إنتـاج مختلفـة،

ويوضـح الجـدول التـالي التكـاليف المتوقعـة لإتمـام كـل أمـر مـن هـذه الأوامـر علي الآلات المذكورة

(الوحدة الف دج)

الآلات	الاستخدامات			
	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	7	9	8	13
X_2	16	16	15	11
X_3	16	19	10	15
X_4	16	17	14	16

وترغب إدارة المنشأة في التوصل إلي برنامج التخصيص الأمثل الذي يخفض تكاليف إنتاج أوامر التشغيل إلي أقل حد ممكن

1) إعداد مصفوفة تكاليف الفرصة الضائعة:

تتضمن هذه المصفوفة تكاليف الفرصة الضائعة الناتجة عن عدم اتباع الطريقة المثلي في تخصيص الآلات لتصنيع أوامر التشغيل؛ أي عدم تعيين الآلة المثلي لتصنيع أمر التشغيل الأمثل. ويمكن توضيح مفهوم تكلفة الفرصة الضائعة في طريقة التخصيص علي النحو التالي:

نفرض أننا قررنا تعيين الآلة X_1 لإنجاز أمر التشغيل Y_4 من الجدول السابق يتضح أن تكلفة هذا التخصيص تبلغ 13 ألف دج، وحيث أن الآلة X_1 يمكنها أيضا إنجاز أمر التشغيل Y_1 بتكلفة مقدارها 7 آلاف دج، فإنه من الواضح أن قرارنا تخصيص الآلة X_1 لإنجاز أمر التشغيل Y_4 ليس هو القرار الأمثل. فعندما نخصص الآلة X_1 لأمر التشغيل Y_4 فإننا نضحي بفرص توفير مبلغ 6 آلاف دج (13 – 7). ويشار إلي هذه التضحية عادة بتكلفة الفرصة الضائعة. وبعبارة أخري فإن قرار تعيين الآلة X_1 لأمر التشغيل Y4 يلغي تخصيص هذه الآلة لأمر التشغيل Y_1 وفقا للقيد المفروض بأنه يمكن تعيين كل آلة لإنجاز أمر تشغيل واحد فقط .وبذلك يمكن القول بأن تكلفة الفرصة الضائعة الناتجة من تعيين الآلة X_1 لإنجاز أمر التشغيل Y_4 تبلغ 6 آلاف دج. وبالمثل بالنسبة لأقل تكلفة تعيين للآلة X_1 فإن قرار تعيين الآلة X_1 لإنجاز أمر التشغيل Y_2 أو Y_3 يتضمن تكلفة فرصة ضائعة قدرها ألفان دج (9-7) أو ألف دج (8-7) علي الترتيب، وحيث أن تعيين الآلة X_1 لإنجاز أمر التشغيل Y_1 هو أفضل تعيين، لذلك فإن تكلفة الفرصة الضائعة لهذا التخصيص تساوي صفر (7 – 7) .

ويمكن تسمية هذه التكاليف بتكاليف الفرصة الضائعة بالنسبة للآلة X_1. واذا ما قمنا بطرح أقل رقم بالصف X_2 من كل رقم من أرقام التكلفة الموجودة في ذلك الصف فإننا نحصل علي تكاليف الفرصة الضائعة بالنسبة للآلة X_2.وبإتباع نفس الطريقة بالنسبة للصفين X_3 ، X_4 فإننا نحصل علي تكاليف الفرصة الضائعة لكل من الآلة X_3 والآلة X_4 وبالإضافة إلي تكاليف الفرصة الضائعة لكل آلة فإنه توجد تكاليف فرصة ضائعة لكل أمر تشغيل، حيث يمكن -علي سبيل المثال – تخصيص أمر التشغيل Y_1 للآلة X_1 أو X_2 أو X_3 أو X_4.فإذا قمنا بتعيين أمر التشغيل Y_1 لأي آلة من الآلات X_2 أو X_3 أو X_4 فإنه توجد تكاليف فرصة ضائعة مرتبطة بهذا القرار .فتعيين أمر التشغيل Y_1 لأي آلة من الآلات الثلاثة السابقة يتكلف 16ألف دج، بينما تعيين هذا الأمر للآلة X_1 يتكلف 7 آلاف دج فقط، إذن تكلفة الفرصة الضائعة الناتجة من تخصيص أمر التشغيل Y_1 لأي آلة من الآلات X_2 أو X_3 أو X_4 تبلغ 9 آلاف دج (16–7) وتكلفة الفرصة الضائعة المرتبطة بتخصيص هذا الأمر للآلة X_1 صفر حيث أن هذا هو أفضل تعيين لأمر التشغيل Y_1 وعلي ذلك يمكن حساب تكاليف الفرصة الضائعة لكل أمر تشغيل (أي لكل عمود) بطرح أقل رقم تكلفة في العمود من كل رقم من أرقام التكاليف الموجودة في هذا العمود.

وفي ضوء المناقشة السابقة لتكاليف الفرصة الضائعة فإن الخطوة الأولي في طريقة التخصيص (الخاصة بإعداد مصفوفة تكاليف الفرصة الضائعة) تتم علي مرحلتين علي النحو التالي- :

أ. تحديد أقل رقم تكلفة في كل صف من صفوف الجدول الأصلي للتكاليف وطرحه من كل رقم من أرقام التكلفة الموجودة في ذلك الصف (ملاحظة يمكن البدء بالأعمدة)، فتكون المصفوفة كما يلي بالجدول التالي:

جدول 1

الالة / امر التشغيل	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	0	2	1	6
X_2	5	5	4	0
X_3	6	9	0	5
X_4	2	3	0	2

وتوضح المصفوفة السابقة تكاليف الفرصة الضائعة لكل آلة من الآلات

ب. تحديد أقل قيمة في كل عمود في المصفوفة السابقة التي تم التوصل إليها في المرحلة (أ) وطرحها من كل قيم ذلك العمود. والمصفوفة الموضحة بالجدول ادناه تتضمن نتائج هذه العملية،

وهذه المصفوفة تمثل مصفوفة تكاليف الفرصة الضائعة الكلية حيث تتضمن تكاليف الفرصة الضائعة لكل آلة وتكاليف الفرصة الضائعة لكل أمر تشغيل.

جدول 2

مصفوفة تكاليف الفرصة الضائعة الكلية

الالة / أمر التشغيل	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	0	2	1	6
X_2	5	5	4	0
X_3	6	9	0	5
X_4	2	3	0	2

III. اختبار المثالية:

إن ظهور الرقم صفر في أي خلية من خلايا مصفوفة تكلفة الفرصة الضائعة الكلية السابقة بجدول رقم (2) يعني انعدام تكلفة الفرصة الضائعة بالنسبة للتخصيص الذي تعبر عنه تلك الخلية. الأمر الذي يعني أن التخصيص الذي يتم عن طريق هذه الخلية الصفرية هو تخصيص أمثل. ولما كانت كل خلية في المصفوفة إنما تعبر عن تخصيص محدد بين أمر تشغيل محدد وبين آلة معينة لإنجازه، لذلك فإن الخلايا الصفرية تحدد لنا صور التخصيص التي يمكن أن تتم بدون تكلفة فرصة ضائعة .

ويتم التوصل إلي الحل الأمثل في برنامج التخصيص إذا توفر في مصفوفة تكاليف الفرصة الضائعة عدد من الخلايا الصفرية المستقلة مساويا لعدد الصفوف أو عدد الأعمدة بحيث يكون مجموع تكاليف الفرصة من استخدام هذه الخلايا في برنامج التخصيص مساويا للصفر. بعبارة أخري، يتم التوصل إلي الحل الأمثل في برنامج التخصيص إذا ما استطعنا اتمام كل التخصيصات المطلوبة في المشكلة من خلال خلايا صفرية.

أما إذا كانت الخلايا الصفرية التي تتضمنها مصفوفة تكاليف الفرصة الضائعة تعطي تعيينات أقل من عدد التخصيصات المطلوبة في المشكلة فإن هذا يعني أننا لم نصل بعد إلي الحل الأمثل، ومن ثم يجب تX2 الحل لإضافة خلايا صفرية جديدة تمكن من إجراء عدد من التخصيصات يساوي عدد التخصيصات المطلوبة لحل المشكلة .

ويلاحظ في مثالنا الحالي أن حل مشكلة التخصيص يتطلب وجود أربع خلايا صفرية مستقلة مختلفة (حيث أن عدد التخصيصات المطلوبة لحل المشكلة يساوي عدد الصفوف أو عدد الأعمدة؛ أي يساوي أربعة) وذلك حتى يمكن التأكد من الوصول للحل الأمثل.

وتتضمن مصفوفة تكاليف الفرصة الضائعة السابقة بجدول رقم(2) علي خمس خلايا صفرية .ومن ثم يكون السؤال: هل هناك أربعة من هذه الخلايا الخمسة يمكن وصفها بأنها مستقلة ؟

ويتم تحديد عدد الخلايا الصفرية المستقلة في نموذج التخصيص عن طريق رسم أقل عدد ممكن من الخطوط يمر بكل الخلايا الصفرية في مصفوفة تكاليف الفرصة الضائعة فيكون هذا العدد من الخطوط ممثلا لعدد الخلايا الصفرية المستقلة. وفي ضوء ذلك إذا كان أقل عدد ممكن من الخطوط يساوي عدد الصفوف أو عدد الأعمدة يكون الحل أمثل . ويوضح جدول (2) مصفوفة تكاليف الفرصة الضائعة بعد رسم الخطوط التي تمر بالخلايا الصفرية

جدول رقم 3

اختبار مثالية برنامج التخصيص الأول

الالة / أمر التشغيل	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	0	2	1	6
X_2	5	5	4	0
X_3	6	9	0	5
X_4	2	3	0	2

ويتضح من جدول اختبار المثالية السابق رقم 3 أن أقل عدد ممكن من الخطوط التي تمر بالخلايا الصفرية يساوي ثلاثة خطوط، ويعني ذلك أنه لا يمكن تحديد أكثر من ثلاثة خلايا صفرية مستقلة في هذا الجدول. وهذا العدد يقل عن عدد الصفوف أو عدد الأعمدة في مشكلة التخصيص الحالية (4 صفوف و 4 أعمدة)، وبذلك يكون الحل غير أمثل ويجب تX2ه

IV. تحسين الحل :

يتم تحسين الحل من خلال تعديل مصفوفة تكاليف الفرصة الضائعة بهدف توفير خلية أو خلايا صفرية مستقلة جديدة، ويتم ذلك على النحو التالي:

1) اختيار أقل قيمة بالخلايا التي لم يمر عليها خط في مصفوفة تكاليف الفرصة الضائعة وطرح هذه القيمة من كل قيم الخلايا التي لم يتم تغطيتها بخطوط)أي الخلايا غير المغطاة
2) إضافة نفس القيمة التي تم اختيارها في الخطوة السابقة إلي قيم جميع الخلايا التي يتقاطع عندها أي خطين من الخطوط التي تم رسمها من قبل
3) تظل قيم باقي الخلايا الأخرى (أي الخلايا المغطاة بخطوط ولكن لا تقع عند تقاطع الخطوط) كما هي بدون تغيير. ،

وبتطبيق هذه الخطوات علي مصفوفة تكاليف الفرصة الضائعة السابقة بجدول 3 يتضح وجود ستة خلايا لم يمر عليها خطوط وهي الخلايا (X_2Y_1)،(X_2Y_2) ،(X_3Y_1)، (X_3Y_2) (X_4Y_1)، (X_4Y_2)، وأقل قيمة في هذه الخلايا تساوي واحد وتقع في الخلية (X_4Y_2)، وبطرح هذه القيمة من قيم كل الخلايا الستة السابقة واضافة نفس هذه القيمة إلي قيم الخلايا الواقعة عند تقاطع الخطوط (أي الخليتين (X_1Y_3)،($(X_1Y_4$ ، تنتج مصفوفة تكاليف الفرصة الضائعة المعدلة الموضحة بجدول رقم (4).

جدول رقم(4)

مصفوفة تكاليف الفرصة الضائعة المعدلة

الالة / امر التشغيل	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	0	0	2	7
X_2	4	2	4	0
X_3	5	6	0	5
X_4	1	0	0	2

ويلاحظ أن مصفوفة تكاليف الفرصة الضائعة المعدلة ب جدول رقم(4) تحتوي علي أربع خطوط تمر بالخلايا الصفرية. ويعني ذلك وجود أربعة خلايا صفرية مستقلة في هذه المصفوفة ومن ثم فإننا نكون قد وصلنا إلي الحل الأمثل الذي يحقق أقل تكاليف ممكنة، أي يمكن تعيين الآلات لأوامر التشغيل دون تحمل تكلفة فرصة ضائعة؛ وفي عبارة أخري يكون مجموع تكاليف الفرصة الضائعة يساوي صفرا.

V. تحديد برنامج التخصيص الأمثل وحساب التكاليف:

لتحديد برنامج التخصيص الأمثل يتم البحث عن الخلية الصفرية التي تكون وحيدة في صفها أو في عمودها ويتم تعيين الآلة لأمر التشغيل الذي يتقابل معها عند هذه الخلية الصفرية، ثم يتم حذف الصف (الممثل للآلة) والعمود (الممثل لأمر التشغيل) اللذين يتقابلان عند هذه الخلية الصفرية، بعد ذلك يتم البحث عن خلية صفرية أخري تكون هي الوحيدة في صفها أو في عمودها ويتم تعيين الآلة لأمر التشغيل الذي يتقابل معها عند هذه الخلية الصفرية، وهكذا حتى يتم تعيين جميع الآلات لجميع أوامر التشغيل.

وبالتطبيق علي المصفوفة السابقة بجدول رقم(4) يكون التخصيص علي النحو التالي:

- يلاحظ من جدول رقـم(4) أن عمود Y_1 يحتوي علـي خليـة صـفرية وحيـدة وهـي الخليـة X_1 Y_1 والتـي يتلاقـي عنـدها صـف الآلـة X_1 مـع عمـود أمـر التشـغيل Y_1 لذلك يتم تعيين الآلـة X_1 لأمـر التشـغيل Y_1 واسـتبعاد الصـف الممثـل للآلـة X_1 والعمود الممثل للأمر Y_1، وبناء عليه تصبح المصفوفة كما يلي :

الالة / امر التشغيل	Y_2	Y_3	Y_4
X_2	2	4	0
X_3	6	0	5
X_4	0	0	2

- يلاحظ من المصفوفة السابقة الناتجة أن صف س 2 يحتوي علـي خليـة صـفرية وحيـدة وهـي الخليـة X_2Y_4 والتـي يتلاقى عنـدها صـف الآلـة X_2 مـع عمـود أمـر التشـغيل Y_4 لـذلك يـتم تعيـين الآلـة X_2 لأمـر التشـغيل Y_4 واسـتبعاد الصـف الممثـل للآلة X_2 والعمود الممثل للأمر Y_4 ، وبناء عليه تصبح المصفوفة كما يلي :

الآلة أمر التشغيل ص2 ص3 س3 6 صفر س4 صفر صفر

الالة / امر التشغيل	Y_2	Y_3
X_3	6	0
X_4	0	0

- يتضح من المصفوفة الجديدة السابقة أن صف س 3 يحتوي علـي خليـة صـفرية وحيـدة وهـي الخليـة X_3Y_3 والتـي يتلاقى عنـدها صـف الآلـة X_3 مـع عمـود أمـر التشـغيل Y_3 لـذلك يـتم تعيـين الآلـة X_3 لأمـر التشـغيل Y_3 واسـتبعاد الصـف الممثـل للآلة X_3 والعمود الممثل للأمر Y_3 ، وبناء علي ه تصبح المصفوفة كما يلي:

الالة / امر التشغيل	Y_2
X_4	0

- يتضح من المصفوفة الأخيرة أن صف X_4 يحتوي علي خلية صفرية وحيدة وهي الخلية X_4Y_2 والتي يتلاقى عندها صف الآلة X_4 مع عمود أمر التشغيل Y_2 لذلك يتم تعيين الآلة X_4 لأمر التشغيل Y_2

ولحسـاب تكلفـة برنـامج التخصيص الأمثـل يـتم الرجـوع إلـ ي المصـفوفة الأصـلية وحساب التكاليف الكليـة وفقـا للتعيين الـذي تـم إجراءه، وبـذلك يكـون برنـامج التخصيص الأمثل كما يلي :
تعيين الآلة X_1 لأمر التشغيل Y_1 بتكلفة 7 آلاف دج
تعيين الآلة X_2 لأمر التشغيل Y_4 بتكلفة 11 ألف دج
تعيين الآلة X_3 لأمر التشغيل Y_3 بتكلفة 10 آلاف دج
تعيين الآلة X_4 لأمر التشغيل Y_2 بتكلفة 17 ألف دج

التكلفة الكلية لبرنامج التخصيص الأمثل 45 ألف دج .طريقة التخصيص وتعظيم الأرباح :تـم تصـميم نمـوذج التخصيص بهـدف تخفـيض التكـاليف أو الوقـت إلـي أدنـي حـد ممكن، ومع ذلك قد يكون هدف متخذ قـرار التخصيص هـو تعظـيم الأربـاح، كأن يرغب في تخصيص رجال البيع على المناطق البيعية بهدف تعظيم الأرباح. فـي هذه الحالة يتم تطبيق نفس خطوات نمـوذج التخصيص السـابق تناولهـا فـي حالـة تخفـيض التكـاليف ولكـن مـع تعديل طفيـف لكـي تناسـب غـرض التعظـيم. حيـث يـتم أولا إعـداد مصـفوفة الأربـاح وبعـد ذلك نطرح ربـح كـل خليـة مـن رقـم الـربح الأكبـر فـي الصـف (أو العمـود)

بالمصفوفة. الأمر الذي سيؤدي إلي تحويل المصفوفة إلي مصفوفة لتكلفة الفرصة الضائعة. ومن ثم تستكمل باقي الخطوات كما سبق في حالة تخفيض التكاليف.

VI. خطوات تطبيق نموذج التخصيص في حالة تعظيم:

مثال :

تقوم إحدى المنشآت الصناعية بتسويق إنتاجها في أربع مناطق بيعية مختلفة، بواسطة أربعة من رجال البيع. وعلي ضوء بيانات الأداء في الماضي ودراية مدير إدارة التسويق بالمنشأة بكفاءة وخبرة هؤلاء الأفراد، أمكن توفير البيانات التالية عن الأرباح (بالألف دج) التي يتوقع أن يحققها كل منهم في كل منطقة من المناطق البيعية المختلفة:

الالة / امر التشغيل	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	8	10	12	6
X_2	10	8	-10	7
X_3	12	8	9	7
X_4	8	11	7	12

وترغب إدارة المنشأة في معرفة البرنامج الأمثل لتعيين رجال البيع علي هذه المناطق البيعية والذي يحقق للمنشأة أقصي أرباح ممكنة.

يمكن استخدام نموذج التخصيص لتخصيص رجال البيع لمناطق التوزيع بشكل يحقق أقصى أرباح ممكنة. وفي هذه الحالة تتبع نفس الخطوات السابقة تناولها في حالة تخفيض التكاليف مع فارق أساسي يتمثل في ارتكاز مشكلة تعظيم الأرباح على مفهوم الأرباح الضائعة بدلاً من مفهوم تكلفة الفرصة الضائعة الذي ترتكز عليه مشكلة تخفيض التكاليف. وعلى ذلك، تتبع الخطوات التالية لتخصيص رجال البيع لمناطق التوزيع بشكل يحقق للمنشأة أقصى أرباح ممكنة:

1. إعداد مصفوفة الأرباح الضائعة:

تتضمن هذه المصفوفة الأرباح الضائعة والتي تتمثل في هذه الحالة في مقدار الربح الذي يضيع علي المنشأة نتيجة عدم وضع رجل البيع المناسب في المنطقة البيعية المناسبة، ويتم إعداد هذه المصفوفة علي مرحلتين علي النحو التالي:

- طرح كل رقم من أرقام الأرباح الموجودة في كل صف من صفوف الجدول الأصلي للأرباح من أكبر رقم ربح في ذلك الصف (ملاحظة يمكن البدء بالأعمدة ، (فتكون المصفوفة كما هو موضح بجدول رقم (5) التالي:

جدول رقم (5)

الالة / امر التشغيل	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	4	2	0	6
X_2	0	2	20	3
X_3	0	4	3	5
X_4	4	1	5	0

توضح المصفوفة التي يتضمنها الجدول السابق الأرباح الضائعة بالنسبة لكل رجل من رجال البيع. فعلى سبيل المثال، إذا اتخذ مدير التسويق قرار بتعيين رجل البيع (X_1) لمنطقة Y_1 فإن هذا من شأنه أن يلغى تعيينه لمنطقة Y_3 تطبيقاً للقيد المفروض بأنه يمكن تعيين فرد واحد فقط لمنطقة واحدة فقط .وعلى ذلك، فإن الأرباح الضائعة التي تترتب على هذا القرار تقدر بمبلغ 4 آلاف دج (12–8)

وأيضاً فإن قرار تعيين رجل البيع(X_1) لـY_2 يترتب عليه أرباح ضائعة قدرها ألفان دج، كما أن قرار تعيين رجل البيع (X_1) لمنطقة Y_4 يترتب عليه أرباح ضائعة قدرها 6 آلاف دج.

وهكذا يتضح أن قرار تعيين رجل البيع (X_1) لمنطقة Y_3 هو القرار الأفضل لأن الأرباح الضائعة التي تترتب على هذا القرار تساوى صفر. وبالمثل فإن قرار تعيين رجل البيع (X_2) لمنطقة Y_1، ورجل البيع (X_3) لمنطقة Y_1، ورجل البيع (X_4) لمنطقة Y_4 هو القرار الأفضل لأن الأرباح الضائعة التي تترتب على هذا القرار تساوى صفر. أر غيـ ن هذا القرار، وإ ان كان يعد أفضل بالنسبة لكل تخصيص (رجل بيع/ منطقة توزيع) على حده، فإنه لا يعد كذلك بالنسبة للمنشأة ككل. ويرجع ذلك إلى أنه لا يمكن تخصيص كلاً من رجلي البيع (X_2) (X_3) لمنطقة Y_1، وترك Y_2 بدون رجل بيع لأن ذلك يعد إخلالاً بالقيد الذي يقوم عليه نموذج التخصيص وهو ضرورة تعيين فرد واحد فقط لمنطقة توزيع واحدة. وعلى ذلك، فإن الحل الذي يتضمنه الجدول (5) ليس هو الحل الأمثل، وبالتالي يتعين الانتقال إلى حل جديد.

- تحديد أقل قيمة في كل عمود في المصفوفة السابقة التي تم التو صل إليها في المرحلة (1) وطرحها من كل قيم ذلك العمود. فتكون مصفوفة الأرباح الضائعة المرتبطة برجال البيع ومناطق التوزيع معاً كما، هو موضح بجدول رقم(6)

جدول رقم(6) مصفوفة الأرباح الضائعة الكلية

الالة / أمر التشغيل	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	4	2	0	6
X_2	0	2	20	3
X_3	0	4	3	5
X_4	4	1	5	0

2. اختبار المثالية:

يتطلب الحل الأمثل في هذا المثال ضرورة وجود أربع خلايا صفرية مستقلة على الأقل، وهو ما يتساوى مع عدد الأعمدة أو عدد الصفوف. وكما أوضحنا من قبل، يمكن تحديد الخلايا الصفرية المستقلة عن طريق رسم اقل عدد من الخطوط الرئيسية (على الأعمدة) والأفقية (على الصفوف) لتغطية الخلايا الصفرية بالجدول رقم **(6)** فإذا كان عدد الخطوط التي تم رسمها مساوياً لعدد الأعمدة أو لعدد الصفوف في الجدول، فأننا نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل، لأنه يمكن في هذه الحالة المقابلة بين رجال البيع ومناطق التوزيع عند مستوى أرباح ضائعة قدرها صفر. ويوضح جدول رقم **(7)** مصفوفة الأرباح الضائعة بعد رسم أقل عدد من الخطوط التي تغطي الخلايا الصفرية.

جدول رقم (7) اختبار مثالية برنامج التخصيص الأول

الالة / أمر التشغيل	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	4	2	0	6
X_2	0	2	20	3
X_3	0	4	3	5
X_4	4	1	5	0

ويتضح من جدول اختبار المثالية السابق **رقم (7)** أن أقل عدد ممكن من الخطوط التي تمر بالخلايا الصفرية 3 خطوط فقط، ويعني ذلك أنه لا يمكن تحديد أكثر من ثلاثة خلايا صفرية مستقلة في

هـذا الجـدول. وهـذا العـدد يقـل عـن عـدد الصفوف أو عدد الأعمدة في مشكلة التخصيص الحالية (4صـفوف و4 أعمـدة)، وبـذلك يكون الحل غير أمثل ويجب تحسينه.

3. تحسين الحل عادة اختبار المثالية:

يتم تحسين الحل من خلال تعديل مصفوفة الأرباح الضائعة بهدف توفير خلية أو خلايا صفرية مستقلة جديدة، ويتم ذلك علي النحو التالي:

أ. اختيـار أقل قيمـة بالخلايـا التـي لـم يمـر عليهـا خـط فـي مصـفوفة الأربـاح الضـائعة وطـرح هـذه القيمـة مـن كـل قيم الخلايـا التـي لـم يـتم تغطيتهـا بخطـوط (أي الخلايـا غير المغطاة)

ب. إضـافة نفس القيمـة التـي تـم اختيارهـا فـي الخطـوة السـابقة إلـي قيم جميـع الخلايـا التي يتقاطع عندها أي خطين من الخطوط التي تم رسمها من قبل.

ت. تظـل قيم بـاقي الخلايـا الأخـرى (أي الخلايـا المغطـاة بخطـوط ولكـن لا تقـع عنـد تقـاطع الخطـوط) كما هي بدون تغيير)

وبتطبيـق هـذه الخطـوات علـي مصـفوفة الأربـاح الضـائعة السـابقة بجـدول رقم (8) يتضـح وجـود سـتة خلايـا لـم تغطـي بخطـوط وأقـل قيمـة فـي هـذه الخلايـا تسـاوي واحـد وتقـع فـي الخليـة، وبطـرح هـذه القيمـة مـن قيم كـل الخلايـا السـتة السـابقة واضـافة نفس هـذه القيمـة إلـي قيم الخلايـا الواقعـة عنـد تقـاطع الخطـوط، تنـتج مصـفوفة الأربـاح الضـائعة المعدلة الموضـحة بجدول رقم (8)

بجدول رقم (8) مصفوفة الأرباح الضائعة المعدلة

الالة / امر التشغيل	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	4	2	0	6
X_2	0	2	20	3
X_3	0	4	3	5
X_4	4	1	5	0

ويلاحظ أن مصـفوفة الأربـاح الضـائعة المعدلـة بجـدول رقـم(2/8) تحتـوي علـي أربع خطوط تغطي الخلايا الصفرية. ويعني ذلك وجود أربعة خلايا صفرية مستقلة في هـذه المصـفوفة ومـن ثـم فإننـا نكـون قـد وصـلنا إلـي الحـل الأمثـل الـذي يحقـق أقصـي أربـاح ممكنـة، أي يمكـن تعيـين رجـال البيـع للمنـاطق البيعيـة مـع عـدم وجـود أي أربـاح ضـائعة؛ وفي عبارة أخري يكون مجموع الأرباح الضائعة يساوي صفر

4. تحديد برنـامج التخصيص الأمثل وحساب الأرباح :

يتطلب تحديد برنامج التخصيص الأمثل البحث في مصفوفة الأرباح الضائعة جدول رقـم (8) عـن صـف أو عمـود يحتـوى علـى خليـة صـفرية وحيـدة، حيـث تـتم المقابلـة بين رجل البيع والمنطقة البيعية المقابلين لهذه الخليـة، ثم يجـرى حـذف الصـف والعمـود اللـذان يتقاطعـان عنـد هـذه الخليـة. وتكـرر هـذه الخطـوة حتـى تـتم المقابلـة الكاملـة بـين جميع رجال البيع ومناطق البيع. وينتج عن هذه الخطـوة الوصـول إلـى برنـامج التخصيص الأمثل وأرباحه كما يلي:

تعيين رجل البيع X_1 لمنطقة Y_3 وتحقيق ربح 12 ألف دج
تعيين رجل البيع X_2 لمنطقة Y_1 وتحقيق ربح 8 آلاف دج
تعيين رجل البيع X_3 لمنطقة Y_2 وتحقيق ربح 12 ألف دج
تعيين رجل البيع X_4 لمنطقة Y_4 وتحقيق ربح 12 ألف دج
الأرباح الكلية لبرنامج التخصيص الأمثل 44 ألف دج

وجديـد بالـذكر أنـه إذا كـان هنـاك أحـد رجـال البيـع الـذي لا ترغـب الإدارة فـي تعيينـه لمنطقة بيعية معينة (وذلك بالنسبة لمشكلة تعظيم الأربـاح)، فـي هـذه الحالـة يـتم وضـع قيمـة كبيرة بالسالب في الخلية غير المرغوب فيها (والتـي تقع عند تقـاطع الصـف والعمـود الممثلـينً أ ثنـاءً لرجـل البيـع

والمنطقــة البيعيــة)، نظــرا لأن هــذه القيمــة الكبيــرة الســالبة لــن تصــبح صــفرا البحث عن برنامج التخصيص الأمثل.

VII.حالات خاصة في مشاكل التخصيص :

قـد تواجهنـا بعض الحـالات الخاصـة أثنـاء حـل مشـاكل التخصيص، والتـي تتطلـب معالجـة خاصة. وسوف نتناول بالمناقشة الحالات الخاصة الأكثر شيوعا فيما يلي :

1َ حالة عدم التوازن:

أن أحد الشروط الواجب توافرها في مشكلة التخصيص هو أن يكون عدد الصفوف بمصفوفة التخصيص مساويا لعدد الأعمدة (مصفوفة مربعة)؛ أي أن عــدد المــوارد المطلــوب تخصيصـها مساويا لعدد الاستخدامات أو المهام المطلوب التخصيص لها. ولكن قد يحدث في كثير من الأحيان أن لا يتساوى عدد الموارد المطلـوب تخصيصها مـع عـدد الاسـتخدامات أو المهـام المطلـوب التخصـيص لهـا ممـا يسـتلزم استبعاد أحـدهم، ومـن أجـل موازنـة المشـكلة وجعلها منطبقة مـع النمـوذج العام لمشكلة التخصيص يـتم معالجـة هـذه الحالة بـأن نضيف صف أو عمود وهمي (صوري) إلي الصفوف أو الأعمدة الناقصة، علـي أن تكـون جميـع عناصـر هـذا الصـف أو العمـود الـوهمي أصـفارا. وبعدئـذ نقـوم بالحـل وفـق الخطـوات الاعتياديـة السـابقةً التي اعتمدت في حل الأمثلة التي تم تناولها في هذا الفصل .

2 حالة تعدد الحلول المثلي :

ليس هناك إشارة واضحة بأنه ستوجد حلول مثلـي متعـددة عنـد محاولـة حـل مشـكلة تعيـين معينة. لكن الطريقة الوحيدة التي يمكن أن يكتشف بهـا ذلـك إذا مـا أمكنـك إيجـاد برنـامجين أو أكثـر للتعيين فـي المصـفوفة النهائيـة. إن أحـد العـادات الجيـدة للتطـوير أن تبحـث دائمـا عـن برنامج أمثل بـديل للتعيـين؛ أي عـدم الاكتفـاء ببرنـامج أمثـل واحـد فقـط لا. شـك أن هـذه الحلـول المثلي الإضـافية توفر مرونـة أكبر للإدارة في اتخاذ القرارات

3 التخصيصات المحظورة (غير المرغوب في استخدامها):

بافتراض أن بعض التخصيصات تعتبر ممنوعة أو غير صـالحة للاستخدام لسـبب مـا. يمكـن عـلاج هـذه المشـكلة بوضـع قيم متناهيـة فـي الكبـر لتكـاليف هـذه التخصيصـات (+ م) لأن هـذهً فـي مصـفوفة تكـاليف الفرصـة وبالتـالي تستبعد هـذه البـدائل عنـد القيم الكبيـرة لـن تصـبح صـفرا الاختيار. الأمر الذي يضمن أن هذه التخصيصات لن تكون في الحل النهائي.

المحور العاشر

تحليل شبكات الأعمال

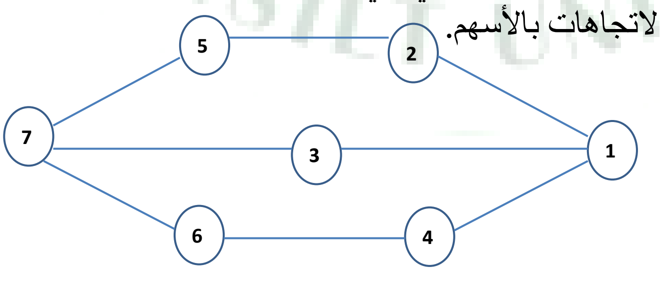
I.مفهوم تحليل شبكات الاعمال:

تتسم كثير من المشكلات التي تواجهنا في الواقع العملي بالتعقيد الأمر الذي يتطلب أحيانا تمثيلها في شكل شبكة أعمال. وترجع أهمية تحليل ودراسة شبكات الأعمال إلى وجود العديد من المشكلات العملية الهامة التي يمكن تمثيلها في صورة شبكات أعمال، ويكون حلها أسهل طالما كان هناك إلمام ودراية بالقواعد التي تحكم شبكات الأعمال ونماذج هذه الشبكات والإجراءات الحسابية لتلك النماذج.

وتعتبر نماذج شبكات الأعمال أحد أساليب بحوث العمليات التي يمكن للإدارة استخدامه ا لمساعدتها في حل كثير من المشاكل مثل المشاكل، مثل مشكلة المرور التي تعاني منها الدول النامية وغير النامية حيث يمكن تمثيلها بشبكة أعمال يجب حلها لتحقيق عدة أهداف منها تحقيق أقصي تدفق ممكن للسيارات عبر شوارع المدينة أو تدنية الوقت الضائع لمواطني المدينة التي تعاني من مشكلة المرور أو تدنية تكاليف تلوث البيئة الناتج عن عوادم السيارات. ومشكلة انقطاع المياه يمكن تمثيلها بشبكة أعمال حيث تتدفق المياه من مصدر معين (محطة ضخ المياه) عبر شبكة من الأنابيب تتفاوت في طاقتها وأقطارها، ويتمثل الهدف من حل هذه المشكلة في إيجاد أقصي تدفق من المياه حتى تصل المياه إلى المواطنين بشكل دائم .ومشكلة المواصلات يمكن تمثيلها بشبكة أعمال تهدف إلي تحديد أقصر طريق بين موقعين حتى يمكن إتباع ذلك عند تصريف منتجات المنشأة بشكل يؤدي إلي خفض التكاليف إلي أدني حد ممكن، والمشاكل التي تتعلق بتحديد أقصي تدفق من سلعة معينة من موقع أو عدة مواقع إلي موقع أو عدة مواقع أخرى وكذلك المشاكل التي تواجه الإدارة عند تخطيط ومتابعة تنفيذ المشروعات التي ترغب في إنشائها وخاصة تلك المشروعات التي تتكون من عدد كبير من الأنشطة التي يجب إنجازها بترتيب معين وتكون مشكلة إدارة هذه المشروعات هي تحديد كيفية تتابع تلك الأنشطة وتنسيقها وتنفيذها بشكل يؤدي إلي تخفيض فترة تنفيذ المشروع إلي أدني ما يمكن.

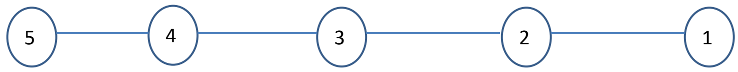
ويمكن تعريف شبكة الأعمال بأنها مجموعة من النقط يرمز لها بالحروف أو الأرقام ومجموعة من الفروع (الخطوط) التي تصل بين كل زوج من النقط ويرمز للفروع بأسماء النقط التي تصل بينها.

ويوضح الشكل رقم (1) نموذجا بسيطا لشبكة أعمال. حيث تم تمثيل كل نقطة بدائرة تحمل رقما بداخلها، وقد تشير كل نقطة علي الشبكة إلي موقع معين أو مدينة معينة أو محطة معينة أو مخزن أو منطقة توزيع. هذا، قد تشير الفروع)الخطوط) الممتدة عبر النقاط إلي الطرق التي تصل بين المواقع أو المدن أو المحطات أو المخازن أو المناطق وبعضها، كما قد تشير إلي خطوط أنابيب المياه أو موجهاً الغاز أو الصرف الصحي في مدينة معينة. هذا ، و يكون الفرع (الخط) إذا كان له اتجاه مرتبط به ، وتحدد الاتجاهات بالأسهم.



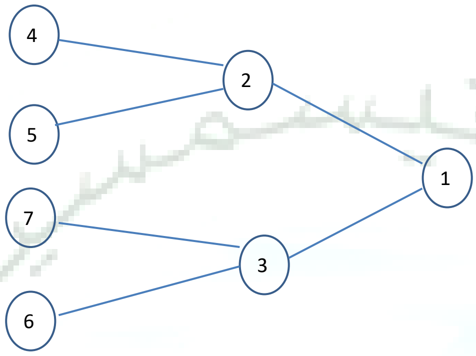
الشكل رقم (1)

تسمي مجموعة الفروع (الخطوط) المتتابعة، التي تصل بين نقطة المصدر ونقطة الوصول، بالسلسلة. ويوضح الشكل رقم (2) سلسلة من الفروع المتتابعة التي تصل بين نقطة المصدر (1) ونقطة الوصول.(5)



الشكل رقم (2)

ويطلق اصطلاح الشجرة علي شبكة الأعمال التي لا تتضمن أي فروع (خطوط) تؤدي إلي إيصال نقطة بنفسها والتي تتفرع من كل نقطة بها مجموعة من الفروع كما هو موضح بالشكل رقم (3)



الشكل رقم (3)

II.أنواع نماذج شبكات الأعمال:

تنقسم نماذج شبكات الأعمال إلي الأنواع الرئيسية التالية:

1. نموذج أقصر طريق:

يشير نموذج أقصر طريق إلي مجموعة الخطوط (الفروع) التي تربط بين عدة نقاط تشكل أقصر مسار (طريق) بين نقطة المصدر، أي النقطة الأولي في الشبكة ونقطة الوصول، أي النقطة الأخيرة في شبكة الأعمال.

ويهدف هذا النموذج إلي تحديد أقصر طريق بين نقطة المصدر ونقطة الوصول، أي تحديد المسار الذي يصل بين المصدر ونقطة الوصول بحيث يكون مجموع التكلفة (أو الزمن أو المسافة) بالأفرع (الخطوط) المكونة لهذا المسار أقل ما يمكن .

هذا ويمكن استخدام نموذج أقصر طريق في حل كثير من المشاكل التي تواجه القائمين علي إدارة المنشآت المختلفة حيث يمكن استخدامه في تحديد أقصر طريق يمكن أن تنقل به منتجات المنشأة بين مدينتين، كما يمكن تطبيقه عند المفاضلة بين عدد من البدائل المتاحة أمام متخذ القرار .... الخ.

أ. خطوات تحديد أقصر طريق :

يتطلب تحديد أقصر طريق إتباع الخطوات التالية:

- ✓ رسم شبكة الأعمال متضمنة النقط المختلفة والخطوط (الفروع) التي تربط بين هذه النقط موضحاً عليها المسافات أو الأزمنة أو التكلفة علي كل خط (فرع)
- ✓ إعداد جدول يتضمن النقط المختلفة التي تضمنتها الشبكة علي أن يدرج أسفل كل نقطة أسماء الفروع (الخطوط) التي تبدأ من هذه النقطة؛ أي الفروع التي تصل هذه النقطة بالنقط الأخرى وطول أو زمن أو تكلفة هذه الفر (وع الخطوط). هذا ويخصص في أعلي الجدول صف لتمييز النقط يدرج به القيمة التي سوف يتم تحديدها فيما بعد لكل نقطة من النقاط المختلفة التي تتضمنها الشبكة
- ✓ يتحدد لنقطة المصدر دائما القيمة صفر باعتبارها نقطة البدء

- ✓ يـتم تقيـيم المسـافة (أو الـزمن أو التكلفـة) مـن نقطـة المصـدر إلـي الـنقط الموصـولة بهـا ويـتم اختيـار أصـغر قيمـة تي تـوال) عبـر عـن أقصـر مسـافة أو زمـن أو أدنـي تكلفـة) ويـتم كتابـة هـذه القيمـة الأصـغر فـوق النقطـة الجديـدة التـي نشـأ ت عنهـا، وتعبر هذه القيمة عن المسافة بين نقطة المصدر و هذه النقطة
- ✓ يتم وضع دائرة أو مستطيل حول الفرع (الطريق) صاحب أصغر قيمة، ثم يتم استبعاد جميع الفروع -التي تنتهي بالنقطة التي تم تحديد قيمتها - من بقية الجدول إن وجدت، حتى لا يتم تقييمها مرة أخرى
- ✓ عنـدما تصـبح جميـع الفـروع (الطـرق) بالجـدول إمـ ا قـد تـم وضـعها فـي دائـرة أو مسـتطيل أو قد تـم استبعادها، نكـون قـد توصـلنا إلـي أقصـر مسـافة يمكـن قطعهـا مـن نقطـة المصـدر إلـي أي نقطـة بالجـدول، ويمثلهـا فـي هـذه الحالـة القيمـة المعطـاة لكـل نقطـة بصـف التقيـيم أعلـي الجدول، ومن ثم فإن القيمة التي تظهر أعلي نقطة الوصول تشير إلي طول أقصر طريق يربط بين نقطة المصدر ونقطة الوصول
- ✓ بعـد ذلك يمكن تحديد المسار الأمثل الذي يمثل أقصـر طريـق يـربط بـين نقطـة المصـدر ونقطـة الوصـول بالاعتمـاد علـي الفـروع المحاطـة بـدوائر أو مسـتطيلات التـي تـم التوصـل إليهـا بالجـدول النهـائي. بحيـث يـتم البـدء مـن نقطـة الوصـول والعـودة إلـي نقطـة المصـدر اعتمادا علـي تلك الفروع

ولتوضيح كيفية تطبيق نموذج أقصر طريق نسوق المثال التالي :

ب.مثال لتوضيح خطوات تحديد أقصر طريق:

تقـوم إحـدى المنشـآت الصـناعية باسـتيراد المـادة الخـام اللازمـة لتصـنيع المنـتج الـذي تقـوم بإنتاجـه، وتخطط إدارة المنشـأة لنقـل المـواد الخـام مـن الميـنـاء الواقـع بالمدينـة (A) إلـي مصـنعها الكـائن بالمدينـة الصـناعية (L) وذلـك مـن خـلال البحـث عـن طريـق لسـيارات النقـل بحيـث تكـون المسـافة بـين المدينـة (A) والمدينـة (L) أقـل مـا يمكـن؛ الأمـر الـذي يـؤدي إلـي تخفـيض تكلفـة النقـل. وقـد أمكـن لإدارة المنشـأة تجميـع البيانـات الخاصـة بالمسـافات (بـالكيلومتر) بـين نقطـة المصـدر (المدينـة A) ونقطـة الوصـول (المدينـة L) والـنقط الوسـيطة (المـدن الوسـيطة الواقعـة علـي الطـرق السـريعة الموصـلة بـين الميـنـاء والمصـنع، وكانـت هذه البيانات كما :

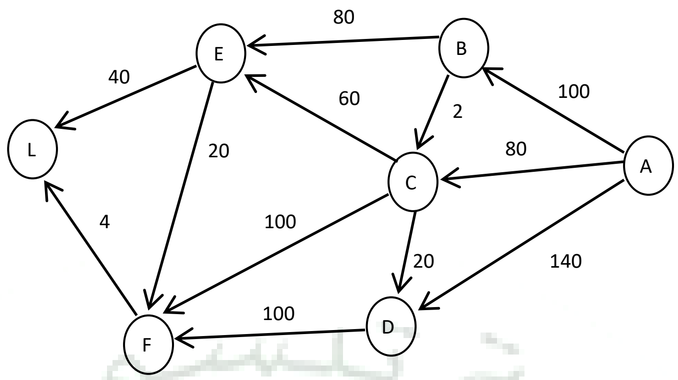
النقطة	الطرق المرتبطة بتلك النقطة		المسافة بالكيلومتر
	من	إلي	
A	A	B	100
	A	C	80
	A	D	140
B	B	C	20
	B	E	80
C	C	D	20
	C	E	60
	C	F	100
D	D	F	100
E	E	F	20
	E	L	40
F	F	L	40

المطلوب :

1) رسـم شـبكة الأعمـال موضـحاً عليهـا المسـافات (بـالكيلومتر) بـين المـدن الوسـيطة علـي الطرق السريعة الموصلة بين المدينة (A) والمدينة (L)
2) تحديد أقصر طريق يمكن أن تقطعه سيارات النقل من الميناء إلي المصنع.

الحل :

أولاً: رسم شبكة الأعمال موضحاً عليها المسافات (بالكيلومتر) بين المدن الوسيطة علي الطرق السريعة الموصلة بين المدينة (A) والمدينة (L)، كما هو موضح بالشكل رقم(4):



الشكل رقم (4)

ثانياً : تحديد أقصر طريق علي الشبكة:

يتم تحديد أقصر طريق علي الشبكة بإتباع الخطوات التالية:

1) إعداد الجدول الأساسي الذي يتضمن النقط المختلفة علي الشبكة، وادراج تحت كل نقطة الطرق التي تصل هذه النقطة بالنقط الأخرى ومسافة كل طريق. كما هو موضح بالجدول رقم (1) التالي:

جدول رقم (1)

A	B	C	D	E	F	L
A B100	B C20	C D20	D F100	E F20	F L40	
A C80	B E80	C E60		E L40		
A D140		C F100				

2) إعطاء قيمة صفر للنقطة (A) باعتبارها نقطة البدء (المصدر)، ثم نحسب مسافة الطرق التي تبدأ من هذه النقطة حتى يمكن المفاضلة بين هذه الطرق واختيار أقصرهم مسافة . وحيث أن القيمة عند النقطة (A) تساوي صفر فإن مسافة الطرق الثلاثة التي تبدأ من النقطة (A) تحسب كالآتي:

$$A\ B=0+100=100$$
$$A\ C=0+80=80$$
$$A\ D=0+140=140$$

نختار الطريق (AC) ونضع القيمة 80 في صف التمييز أعلي عمود النقطة(C) ، ثم نضع مستطيل حول الطريق (AC) الموجود بعمود النقطة (A) وكذلك نستبعد جميع الطرق التي تنتهي بالنقطة (C) من باقي الجدول وهي الطريق (BC) فقط . ويظهر الجدول الجديد علي النحو الموضح بالجدول رقم (2)

الجدول رقم (2)

A	B	C	D	E	F	L
A B100		C D20	D F100	E F20	F L40	
$\boxed{\text{A C80}}$	B E80					
A D140		C F100				

وتشير القيمة التي تظهر أعلي النقطة (C) بالجدول السابق رقم (2) إلي طول الطريق الذي يربط النقطة (A) بالنقطة (C)، وهو يعد أقصر طريق يغادر نقطة المصدر (A)

3) بنهاية الخطوة الثانية نكون قد وضعنا في صف التمييز القيمتين صفر و 80 أعلي النقطتين (A) و(C) علي التوالي . وبذلك ندرس الطرق التي تبدأ من هذين النقطتين (بعد استبعاد

مـا تـم وضـعه فـي مسـتطيل) للحصـول علـي أقصـر الطـرق مسافة . وتكون الطرق محل الدراسة في هذه الحالة ومسافاتها كالآتي:

A B=0+100=100
A D=0+140= 140
C D=80+20=100
CE=80+60=140
CF=80+100=180

نختـار الطريـق الأقصـر مسـافة ونظـرا ال لأن طـريقين (AB)، (CD) لهمـا نفسـ المسافة الأقصر فإننا نختار كل من النقطة (B) التي ينتهي عندها الطريق الأول (AB) والنقطة (D) التي ينتهي عندها الطريق الثاني (DC) ونضع القيمة 100 في صف التمييز أعلي عمود كل من هاتين النقطتين (B,D) ثم نضع مستطيل حول الطريقين (AB)، (CD) وكذلك نستبعد جميع الطرق التي تنتهي بأي من النقطتين (B,D) من باقي الجدول و هي الطريق (AD) فقط، ومن ثم يظهر الجدول الجديد رقم (3) كما يلي:

جدول رقم (3)

A	B	C	D	E	F	L
$\boxed{\text{A B100}}$		$\boxed{\text{C D20}}$	D F100	E F20	F L40	
$\boxed{\text{A C80}}$	B E80	C E60		E L40		
		C F100				

بالانتهاء من الخطوة السابقة تكون جميع الطرق التي تبدأ مباشرة بالنقطة (A) إما قد تم وضع مستطيل حولها أو قد تم استبعادها لذلك يتم دراسة الطرق التي تبدأ من النقط (B) (C) (D) للحصول علي أقصر هذه الطرق مسافة. وتكون الطرق محل الدراسة في هذه الخطوة ومسافاتها كالآتي:

BE=0+100=100
A D=0+140= 140
C D=80+20=100
CE=80+60=140
CF=80+100=180

يلاحظ أن الطريق CE هو أقصر الطرق مسافة لذلك نضع القيمة 140 في صف التمييز أعلي عمود النقطة E ثم نقوم بوضع مستطيل حول الطريق CE مع استبعاد جميع الطرق التي تنتهي بالنقطة E من باقي الجدول وهي الطريق BE فقط

وبتنفيذ ذلك يظهر الجدول الجديد (4)على النحو التالي:

الجدول الجديد (4)

A	B	C	D	E	F	L
$\boxed{\text{A B100}}$		$\boxed{\text{C D20}}$	D F100	E F20	F L40	
$\boxed{\text{A C80}}$		$\boxed{\text{C E60}}$		E L40		
		C F100				

4) دراسة الطرق التي تبدأ من النقط (CDE) للوصول إلي أقصر هذه الطرق مسافة. وتكون الطرق محل الدراسة في هذه الخطوة ومسافاتها كالآتي:

CF=80+60=140
DF=100+100=200
EF=140+20=160
EL=140+40=180

يلاحظ أن الطريق EF هو أقصر الطرق مسافة لذلك نضع القيمة 160 في صف التمييز أعلي عمود النقطة F ثم نقوم بوضع مستطيل حول هذا الطريق مع استبعاد جميع الطرق التي تنتهي بالنقطة F من باقي الجدول وهي الطرق CF ، DF وبتنفيذ ذلك يظهر الجدول الجديد علي النحو الموضح بالجدول رقم (5)

جدول رقم (5)

A	B	C	D	E	F	L
A B100		C D20		E F20	F L40	
A C80		C E60		E L40		

5) دراسة الطرق التي تبدأ من النقطتين F، E للوصول إلي أقصر هذه الطرق مسافة. وتكون الطرق محل الدراسة في هذه الخطوة ومسافاتها كالآتي:

EL=140+40=180

FL=160+40=200

يلاحظ أن الطريق EL هو أقصر الطرق السابقة مسافة لذلك نضع القيمة 180في صف التمييز أعلي عمود النقطة (L) ثم نقوم بوضع مستطيل حول هذا الطريق مع استبعاد الطرق التي تنتهي بالنقطة (L) من باقي الجدول وهي الطريق FL ومن ثم يظهر الجدول الجديد رقم (6) علي النحو التالي:

الجدول رقم (6)

A	B	C	D	E	F	L
A B100		C D20		E F20		
A C80		C E60		E L40		

تشير القيمة التي تظهر أعلي النقطة (L) بالجدول السابق رقم (3) إلي طول أقصر طريق يربط نقطة المصدر (المدينة A) بنقطة الوصول (المدينةL) وبناء عليه يمكن تحديد المسار الأمثل علي النحو التالي : نبدأ من نقطة الوصول وهي (L) ونعود إلي الخلف آخذين في الاعتبار الطرق المحاطة بمستطيلات المذكورة في الجدول النهائي رقم (6) حيث نجد أن أقصر الطرق مسافة هي أن نعود من (L) إلي (E) ثم إلي (C) ثم إلي (A) كما يلي:

- بدأ بنقطة الو صول (L) ونرجع للخلف للبحث عن الطريق الذي تكون نقطته الثانية (L) فنجده(EL)
- نرجع إلي الخلف بعد تحديد الطريق (EL) للبحث عن الطريق الذي تكون نقطته الثانية (E) فنجده.(CE)
- نرجع إلي الخلف بعد تحديد الطريق (CE) للبحث عن الطريق الذي تكون نقطته الثانية (C) فنجده (AC) وفي ضوء ذلك يتحدد المسار الأمثل بدءا بنقطة المصدر(A) بالطرق (EL) (CE) (AC)

2. نموذج أقصي تدفق :

يستخدم نموذج أقصي تدفق في حل المشاكل المتعلقة بتحديد أقصي كمية من المواد (أو أقصي عدد من السيارات في حالة تنظيم حركة المرور) يمكن تدفقها بين نقطتين عبر مسارات متعددة تتفاوت من حيث طاقتها، ولما كان كل مسار يتكون من فرع أو أكثر من الأفرع المتتابعة التي تصل بين نقطة المصدر ونقطة الوصول فإن طاقة أي مسار يحكمها أدنى طاقة يمثلها فرع معين من الفروع المكونة لهذا المسار.

هذا وتجدر الإشارة إلي أن التدفق عبر أي مسار يجب أن يحقق التوازن بمعني أن التدفق الداخل إلي نقطة معينة علي المسار يجب أن يساوي التدفق الخارج من هذه النقطة. فعلي سبيل المثال يفترض في حالة نقل المواد ألا تخزن أي كمية من المواد في النقط الوسيط التي تقع بين نقطة

المصدر ونقطة الوصول، وهو ما يعني أن أي مواد تصل إلي موقع معين تشحن بالكامل إلي الموقع الذي يليه حتى تصل إلي نقطة الوصول.

ومن التطبيقات العملية لاستخدام نموذج أقصي تدفق تخطيط شبكات مياه الشرب والصرف الصحي، وتخطيط شبكات مياه الري والصرف الزراعي، تخطيط شبكات نقل الكهرباء وتخطيط شبكات الغاز الطبيعي، تخطيط تدفق السيارات عبر الشوارع المختلفة (حركة المرور ،) وتخطيط نقل المنتجات عبر وسائل النقل المختلفة)بحرية – برية – جوية) ... .الخ

أ.خطوات تحديد أقصي تدفق:

- ✓ رسم شبكة أعمال للمشكلة موضحاً عليها النقط والفروع (الخطوط) وطاقة كل .فرع
- ✓ اختيار أي مسار من مسارات الشبكة يبدأ من نقطة المصدر وينتهي عند نقطة الوصول ويتكون من مجموعة من الفروع المتتابعة، و بشرط أن تكون طاقة كل فرع من أفرع هذا المسار أكبر من الصفر
- ✓ تحديد طاقة المسار الذي تم اختياره، أي أقصي كمية يمكن تدفقها عبر هذا المسار. وتتحدد هذه الطاقة علي أساس أدنى طاقة للفروع المكونة لهذا المسار .ويرمز لطاقة المسار بالرمز(ط)
- ✓ تخفيض الطاقة المباشرة لكل فرع من الفروع المكونة للمسار بمقدار طاقة المسار (ط) التي تم تحديدها في الخطوة السابقة . وبالتالي يتبقى علي كل فرع من أفرع هذا المسار مقدار الطاقة غير المستغلة للفرع . ثم يعاد رسم الشبكة بصورتها الجديدة
- ✓ تكرار الخطوات 2، 3، 4 السابقة طالما كانت هناك مسارات علي شبكة الأعمال تستوعب تدفق موجب من نقطة المصدر إلي نقطة الوصول، وهكذا حتى يصبح من غير الممكن تحديد مسار جديد للتدفق علي الشبكة نتيجة لأن طاقة كل الفروع أو بعضها المكونة لكل مسار من مسارات الشبكة قد وصلت إلي الصفر
- ✓ تحديد أقصي تدفق عبر مسارات الشبكة وذلك علي أساس مجموع طاقات المسارات التي تم تحديدها في الخطوات السابقة .

ويمكن توضيح الخطوات السابقة من خلال المثال التالي:

ب.مثال لتوضيح خطوات تحديد أقصي تدفق:

يخطط مرفق مياه القاهرة الكبرى لضخ أقصي كمية من المياه عبر الأنابيب الموصلة بين محطة ضخ المياه (نقطة المصدر A) وخزان تجميع المياه بأحد أحياء المدينة G (نقطة المصب G). وفيما يلي طاقة التدفق لكل خط من خطوط ضخ المياه التي تربط بين نقطة المصدر ونقطة المصب (بالألف متر مكعب في اليوم):

خط الأنابيب	B	C	D	E	F	L	G
A	9	6	9	-	-	-	-
B	-	3	-	-	12	15	-
C	-	-	6	-	3	-	-
D	-	-	-	6	-	-	-
E	-	-	-	-	6	-	15
F	-	-	-	-	-	6	3
L	-	-	-	-	-	-	9

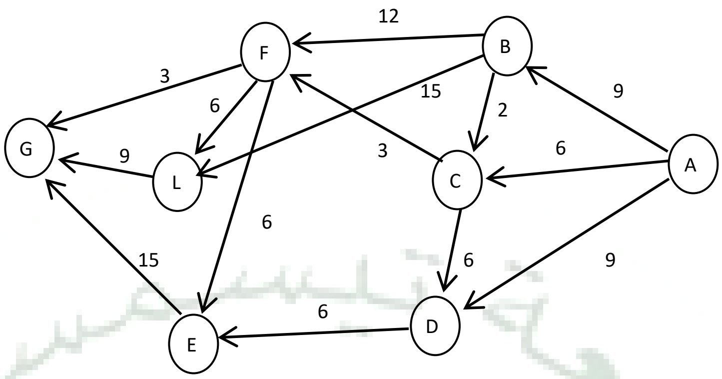
المطلوب:

1. رسم شبكة تمثل خطوط أنابيب المياه التي تربط بين نقطة المصدر (A)، ونقطة الوصول (G) موضحاً كمية المياه التي يمكن أن تتدفق عبر هذه الخطوط علي الأفرع المختلفة للشبكة، وذلك بافتراض أن الشبكة غير موجهة (وهو ما يعني إمكانية تدفق المياه في كلا الاتجاهين باستثناء الأفرع المرتبطة بنقطة المصدر والأفرع المرتبطة بنقطة المصب)

2. تحديد أقصي كمية من المياه يمكن أن تتدفق عبر خطوط أنابيب المياه من محطة الضخ (A) إلي خزان المياه (G)

الحل:

أولاً: رسم الشبكة التي تمثل خطوط أنابيب المياه كما هو موضح بالشكل رقم (5) التالي:



الشكل رقم (5)

ثانياً : تحديد أقصي كمية من المياه يمكن أن تتدفق عبر خطوط أنابيب المياه من محطة الضخ (A) إلي خزان المياه (G)، ويتم ذلك بإتباع الخطوات التالية

أ. اختيار أحد المسارات الذي يربط نقطه المصدر (A) بنقطة الوصول (G) ليكن المسار (AB) (BL)، (LG)

الفروع المكونة للمسار :هي (AB) (BL)، (LG)

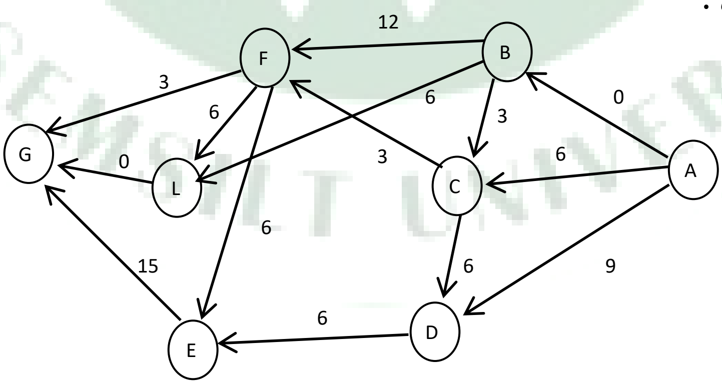
طاقة التدفق لكل فرع (9) (15)، (9)

أدني طاقة تدفق علي المسار (9)

يتحدد أقصي تدفق عبر هذا المسار علي أساس أدنى طاقة لفروع هذا المسار، وهي طاقة كل من الفرع (AB) ، (LG) وقدرها 9

اذا $ط_1=9$

تخفيض طاقة كل فرع من فروع المسار (AB) (BL)، (LG) بمقدار 9 للوصول إلي الطاقة غير المستغلة لهذه الأفرع، عادة رسم الشبكة بعد إجراء هذا التخفيض وذلك كما هو موضح بالشكل) رقم (6) التالي :



الشكل رقم (6)

يلاحظ بانتهاء هذه الخطوة أن طاقة كل من الفرع (AB) والفرع (LG) قد استنفدت بالكامل وبالتالي أصبحت تساوي صفر، ولهذا لا يمكن في أي خطوة من الخطوات التالية اختيار أي مسار يبدأ بالفرع (AB) أو أي مسار ينتهي بالفرع (LG)

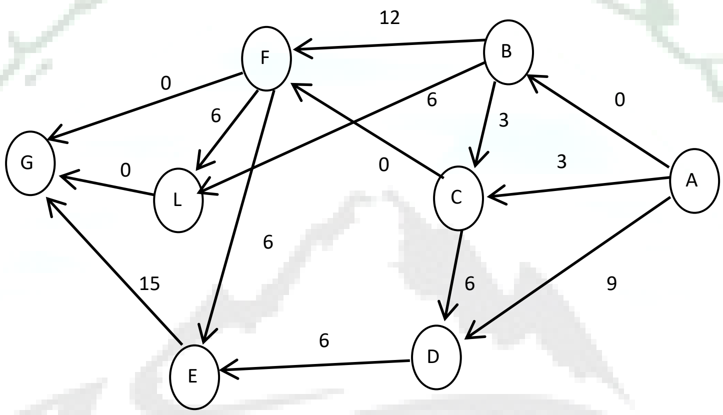
ب. اختيار المسار AC) (CF)، (FG) الذي يربط بين نقطة المصدر (A) ونقطة الوصول (G)

- الفروع المكونة للمسار : هي (AB) (BL)، (LG)
- طاقة التدفق لكل فرع (6) (3)، (3)
- أدني طاقة تدفق علي المسار 3
- يتحدد أقصي تدفق عبر هذا المسار علي أساس أدني طاقة لفروع المسار وهي طاقة كل فرع من الفرعين (BL)، (LG) وقدرها 3.

اذا ط$_2$ = 3

ت. تخفيض طاقة كل فرع من فروع المسار (AB) (BL)، (LG) بمقدار 3 للوصول إلي الطاقة غير المستغلة لهذه الأفرع، الأمر الذي يؤدي إلي استنفاد طاقة كل من الفرعين (BL)، (LG) بالكامل؛ أي تصبح طاقة أياً منهم تساوي .صفر وبالتالي لا يمكن في أي خطوة تالية اختيار أي مسار يدخل ضمن مكوناته أياً من هذين الفرعين.

ويتم إعادة رسم الشبكة بعد إجراء التخفيض وذلك كما هو موضح بالشكل رقم (7)، التالي:



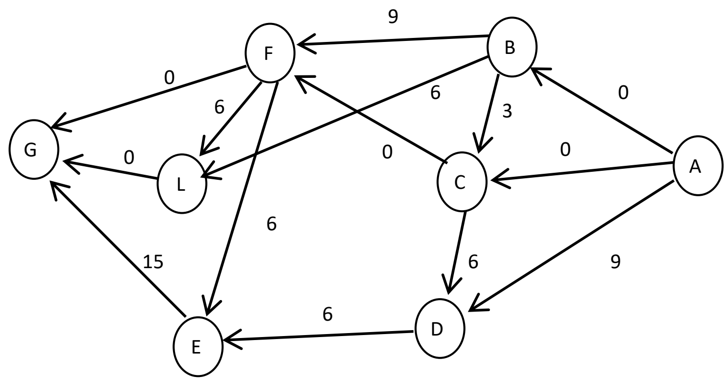
الشكل رقم (7)

ث. اختيار المسار (AC) (CB)، (BF) (FE) (EG)، الذي يربط بين نقطة المصدر (A) ونقطة الوصول (G)

- الفروع المكونة للمسار هي: (AC) (CB)، (BF) (FE) (EG)
- طاقة التدفق لكل فرع (3) (3)، (12) (6) (15)
- أدني طاقة تدفق على المسار 3
- يتحدد أقصي تدفق عبر هذا المسار على أساس أدني طاقة لفروع المسار وهي طاقة كل فرع من الفرعين (AC) (CB) وقدرها 3.

إذا ط$_3$=3

- تخفيض طاقة كل فرع من فروع المسار (AC) (CB)، (BF) (FE) (EG) بمقدار 3 للوصول إلى الطاقة غير المستغلة لهذه الأفرع، ويؤدي هذا الإجراء إلي أي تصبح طاقة أياً منهم استنفاد طاقة كل من الفرعين (AC) (CB) بالكامل؛ أي تصبح طاقة أي منهم تساوي. صفر وبالتالي لا يمكن في أي خطوة تالية اختيار أي مسار يدخل ضمن مكوناته أياً من هذين الفرعين. ويتم إعادة رسم الشبكة بعد إجراء التخفيض السابق وذلك كما هو موضح بالشكل رقم (8) التالي



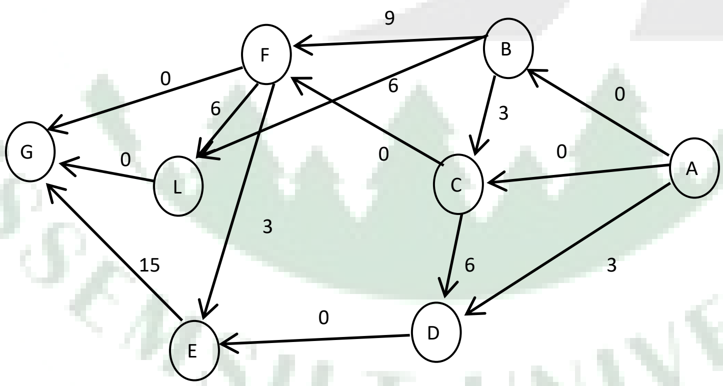
الشكل رقم (8)

ج.اختيار المسار (AD) (DE) (EG) الذي يربط بين نقطة المصدر (A) ونقطة الوصول (G)

- الفروع المكونة للمسار (AD) (DE) (EG)
- طاقة التدفق لكل فرع (9)، (6) (12)
- أدني طاقة تدفق علي المسار 6
- يتحدد أقصي تدفق عبر هذا المسار علي أساس أدني طاقة لفروع المسار وهي طاقة الفرع (DE) وقدرها 6

اذاط$_4$ = 6

- تخفيض طاقة كل فرع من فروع المسار (AD)، (DE) (EG) بمقدار 6 للوصول إلي الطاقة غير المستغلة لهذه الأفرع، ويؤدي هذا الإجراء إلي استنفاد طاقة الفرع هـد بالكامل؛ أي تصبح طاقته صفر. وبالتالي لا يمكن اختيار أي مسار فيما بعد يدخل ضمن مكوناته هذا الفرع. ويتم إعادة رسم الشبكة بعد إجراء التخفيض السابق وذلك كما هو موضح بالشكل رقم (9) التالي



الشكل رقم (9)

يلاحظ من الشبكة السابقة بالشكل رقم (9) أنه لا يمكن تحديد أي مسار آخر يسمح بتدفق موجب من نقطة المصدر (A) إلي نقطة الوصول (G) بخلاف المسارات التي سبق تحديدها، حيث أننا عند محاولة تحديد مسارات أخرى علي الشبكة السابقة سوف نواجه بفروع قد استنفدت طاقتها بالكامل وأصبحت طاقتها غير المستغلة صفر، الأمر الذي يعني عدم إمكانية التدفق عبرها، ولقد سبق القول بأن أحد الشروط لاختيار المسار الذي يربط نقطة المصدر بنقطة الوصول هو أن تكونً لعدم تحقق هذا الشرط في طاقة كل فرع من أفرع المسار أكبر من الصفر، ونظرا الشبكة السابقة فإننا نكون قد وصلنا إلي نهاية الحل.

وعلي ضوء ما سبق يمكن تحديد جدول التدفق الأمثل للمياه عبر خطوط أنابيب المياه من محطة الضخ (نقطة المصدر A) إلي خزان المياه (نقطة الوصول G) عن طريق مقارنة الحل

الذي يتضمنه الشكل السابق رقم (9) بالحالة الأصلية التي يتضمنها الشكل رقم (5) بالمثال، وذلك بغرض تحديد مقدار التخفيضات التي حدثت في طاقات الفروع (خطوط الأنابيب) ، والتي تحدد بدورها كمية المياه التي يمكن أن تتدفق عبر خطوط أنابيب المياه من محطة الضخ (نقطة المصدر A) إلـي خزان المياه (نقطة الوصول G) ، وهو ما يوضحه الجدول التالي رقم (7) :

جدول التدفق الأمثل

خط الأنابيب	B	C	D	E	F	L	G	الاجمالي
A	9	6	9	-	-	-	-	21
B	-	3	-	-	12	15	-	15
C	-	-	6	-	3	-	-	3
D	-	-	-	6	-	-	-	6
E	-	-	-	-	6	-	15	12
F	-	-	-	-	-	6	3	3
L	-	-	-	-	-	-	9	9
الاجمالي	9	9	6	6	9	9	21	

في ضوء ما تقدم يمكن تحديد أقصي كمية من المياه يمكن أن تتدفق عبر خطوط أنابيب المياه التي تربط محطة الضخ (نقطة المصدر) بخزان المياه (نقطة الوصول) كما يلي : أقصي كمية من المياه يمكن أن تتدفق عبر خطوط أنابيب المياه (ط) = ط$_1$ + ط$_2$+ ط$_3$+ط$_4$

(ط) = 9+3+3+6=21 ألف متر مكعب.

المسارات (خطوط الأنابيب) التي تتدفق خلالها المياه من محطة الضخ إلـي خزان المياه:

- المسار (خط الأنابيب (AB) (BL) (LG) وتبلغ كمية المياه التي تتدفق عبره 9 آلاف متر مكعب
- المسار (خط الأنابيب (AC) (CF) (FG) وتبلغ كمية المياه التي تتدفق عبره 3 آلاف متر مكعب
- المسار (خط الأنابيب (AC) (DE) (BF) (FE) (EG) وتبلغ كمية المياه التي تتدفق عبره 3 آلاف متر مكعب
- المسار (خط الأنابيب (AD) (DE) (EG) وتبلغ كمية المياه التي تتدفق عبره 6 آلاف متر مكعب.

قائمة المراجع

1. أبو القاسم مسعود الشيخ، بحوث العمليات، المجموعة العربية للتدريب والنشر، القاهرة، مصر، ط2، 2014.
2. اليامين فالتة، بحوث العمليات، ايتراك للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، القاهرة، مصر، 2006.
3. جلال إبراهيم العبد، استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية، دار الجامعة الجديدة، الإسكندرية، مصر، 2014.
4. حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، مدخل إلى بحوث العمليات، دار مجدلاوي للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، الطبعة الأولى 2007.
5. سهيلة عبد الله سعيد، الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات، دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، الطبعة الأولى، 2007.
6. عبد الرحمن بن محمد أبو عمه، محمد أحمد العش، البرمجة الخطية، مطبعة جامعة الملك سعود، الطبعة الأولى، المملكة العربية السعودية، 1990.
7. عبد الرزاق الموسوي، المدخل لبحوث العمليات، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، الطبعة الثانية.
8. عبد الستار أحمد محمد الآلوسي، أساليب بحوث العمليات (الطرق الكمية المساعدة في اتخاذ القرار)، دار القلم للنشر، الإمارات.
9. محمد راتول، بحوث العمليات، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، الطبعة الثانية، 2006.
10. محمد عبد العال النعيمي وآخرون، بحوث العمليات، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، الطبعة الثانية، 2011.
11. مصطفى أبو بكر، مصطفى مظهر، بحوث العمليات وفاعلية القرارات، مكتبة عين شمس، القاهرة، مصر، 1997.
12. مكيد علي، بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية "نظرية الشبكات ومسائل النقل والتخصيص"، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2016.
13. منعم زمزير الموسوي، بحوث العمليات-مدخل علمي لاتخاذ القرارات-، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، ط1، 2009.
14. جهاد صياح بني هاني، " بحوث العمليات والأساليب الكمية نظرية وتطبيق ادار جليس الزمان، عمان2008
15. فتحي خليل حمدان بحوث العمليات مع تطبيقات باستخدام الحاسوب، دار وائل للنشر، الأردن2010 ط1.
16. محمد دباس الحيد محمد العزاوي الأساليب الكمية في العلوم الإدارية، دار اليازوري، الأردن، 2013.
17. مكيد علي " :بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية دروس ومسائل محلولة، ج1، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر 2015
18. راتول محمد: " بحوث العمليات "، ديوان المطبوعات الجامعية، ط2، الجزائر، 2006
19. محمد عبد العال النعيمي وآخرون، بحوث العمليات، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، الطبعة الثانية، 2011