الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة تيسمسيلت

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

مطبوعة علمية بعنوان

محاضرات في نمذجة الظواهر الاقتصادية

من إعداد

الأستاذ الدكتور/ عيسى دراجي

موجهة إلى طلبة الليسانس والماستر

- العلوم الاقتصادية

السنة الجامعية 2024/2023

محاضرات في نمذجة الظواهر الاقتصادية

فهرس المحتويات

مقدمة	06
المحور الأول: مدخل إلى نمذجة الظواهر الاقتصادية	07
I. مفهوم النمذجة الاقتصادية	08
II. تعريف النموذج الاقتصادي	09
III. متغيرات النموذج	09
IV. معادلات النموذج	10
V. أنواع النماذج الاقتصادية	11
VI. مراحل بناء النماذج الاقتصادية القياسية	12
المحور الثاني: نماذج الإنحدار الخطي البسيط	17
I. النموذج الرياضي	18
II. 2.2- الفرضيات الأساسية للنموذج	19
III. توزيع المتغير التابع Y	19
IV. تقدير النموذج الخطي طريقة المربعات الصغرى:	20
V. تباينات المقدرات	21
VI. أفضل مقدر خطي غير متحيز (أو نظرية قوس- ماركوف)	23
VII. تباين الخطأ العشوائي (U_i)	25
VIII. التقدير بطريقة المعقولية العظمى:	26
IX. الإختبارات الإحصائية حول معنوية المعالم: إختبارات الدرجة الأولى.	27
X. التنبؤ:	35
XI. خصائص المقدرات:	37
المحور الثالث: نماذج الإنحدار الخطي المتعدد	45
I. نموذج الإنحدار بمتغيرين مستقلين وفرضياته الأساسية	46
II. المعادلات الطبيعية للمربعات الصغرى العادية	46
III. حساب معامل التحديد المضاعف	49
IV. وسط تباين مقدرات المعالم	50
V. إختبار معنوية المعالم	50
VI. توسيع نموذج الإنحدار ذو متغيرين مستقلين إلى (K) متغير مستقل.	51
VII. إختبارات التوزيع "F"	56

VIII. الإرتباط الجزئي.	57
المحور الرابع: نماذج السلاسل الزمنية	61
تقديم	62
I. السلاسل الزمنية	62
II. طرق تحديد واكتشاف مركبات السلسلة الزمنية	63
III. طريقة بايز بالو في التنبؤية	67
IV. طريقة التمهيد الأسي	68
V. طريقة بوكس-جنكنز لتحليل السلسلة الزمنية العشوائية	70
VI. خصائص النموذج	74
VII. تقدير معالم نموذج الانحدار الذاتي	80
المحور الخامس: نماذج المعادلات الآنية	83
I. نموذج توازن السوق	84
II. النموذج الكينزي في تحديد الدخل	85
III. الصيغة العامة لنماذج المعادلات الآنية	86
IV. مشكلة التحيز الآني	86
V. مشكلة التمييز	87
VI. الشكل العام والشكل المختزل للمعادلات	88
VII. تقدير نموذج المعادلات الآنية	90

مقدمة:

يعد استخدام الأدوات الكمية لقياس الآليات التي تحكم الظواهر الاقتصادية، له دور مهم في فهم النظرية الاقتصادية والتي توفر رؤى حول مختلف الظواهر الاقتصادية حيث أن هذه الأساليب الكمية القياسية تساعد على التحليل الظواهر الاقتصادية بغرض اتخاذ القرارات الاستراتيجية سواءا على المستوى الجزئي أو الكلي، بما يسمح برسم السياسات الاقتصادية واتخاذ القرارات، كما قدم مفكرو الاقتصاد القياسي مساهمات كثيرة في النظرية الاقتصادية، من خلال استخدام الاساليب الاحصائية والاقتصادية القياسية التي تفيد في معرفة و رصد سلوك بعض المتغيرات في الماضي، ثم التنبؤ بسلوكها المستقبلي. مما يبين أهمية عملية نمذجة الظواهر الاقتصادية.

واعتبارا من كوننا قمنا بتدريس محتوى هذه المقياس لعدة سنوات، وكذلك بعد الإشراف على عدة مذكرات في هذا التخصص حيث تبين الحاجة لمثل هذه المطبوعة في هذا المجال لذلك رأينا ان تكون هذه الدروس الموجهة لطلبة كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، خاصة طلبة السنة الأولى ماستر تخصص تحليل اقتصادي واستشراف على شكل مطبوعة تتضمن دروس تحوي أساليب إحصائية متنوعة، وأمثلة تطبيقية عديدة ذو فائدة لقطاع واسع من القراء والباحثين المهتمين بهذا المجال وتساعدهم في فهم واستيعاب المفاهيم والمبادئ الأساسية لنمذجة الظواهر الاقتصادية. وقد حاولنا في هذه المطبوعة تبسيط مختلف المفاهيم النظرية حتى يتسنى للدارس التمكن من فهمها دون صعوبة وذلك من خلال مرافقة الجانب النظري بأمثلة توضيحية وتطبيقية.

ومن خلال ما هو معتمد في البرنامج المسطر لهذا المقياس والخاص بالسنة أولى ماستر اخصص تحليل اقتصادي واستشراف ومن أجل الحصول على فهم جيد لمكونات المقياس، تم تقسيم محتوى هذه المطبوعة إلى خمسة محاور متمثلة في:

1. مدخل إلى نمذجة الظواهر الاقتصادية
2. النماذج الخطية البسيطة
3. النماذج الخطية الالمتعددة
4. نماذج السلاسل الزمنية
5. نماذج المعادلات الآنية

المحور الأول:

مدخل إلى نمذجة الظواهر الاقتصادية

محاضرات في نمذجة الظواهر الاقتصادية

تقديم:

لقد أخذت النماذج الاقتصادية اهتمام كبيرا من الدراسة خلال العقود الاخيرة نظراً لاستخداماتها الواسعة والمتعددة في البلدان المتطورة اقتصاديا وذلك من خلال تمكينها في رصد التغيرات الكلية المستقبلية لوضع خططها الاقتصادية القصيرة والمتوسطة الأجل حيث تركز النماذج الاقتصادية الكلية على تحليل بيانات الاقتصاد في شكل نماذج متعددة المعادلات ونماذج اشعة الانحدار الذاتي ونماذج التوازن العام ونماذج الدورة التجارية الحقيقية ونماذج العوامل التمثيلية وكانت النماذج التي طورت من بعد الحرب العالمية الثانية والمستوحاة من النموذج الكينزي

I. مفهوم النمذجة الاقتصادية:

إن عملية نمذجة الظواهر الاقتصادية، هو التفسير الرياضي المبسط لهذه الظاهرة، الذي يأخذ في الأغلب شكل معادلات أو متباينات أو توابع تمثل العلاقة التي يمكن قياسها كميا لمختلف العوامل التي لها علاقة بالظاهرة، وهناك عدة تعاريف لعملية النمذجة وجميعها تشترك في خاصية واحدة مستندة على الهدف الأساسي لعملية النمذجة، حيث تعتبر النمذجة مجموعة من العمليات التوصيقية لبناء النماذج التي يراد بها تبسيط التعامل مع الظاهرة الاقتصادية المعقدة، وهذا بدوره يعتمد على مجموعة من العناصر الأساسية، والتي تشمل على:

1. الموضوع: أي بماذا يتعلق النموذج؟
2. الهدف: أي ماذا سيفعل النموذج؟
3. النظرية: أي على أية نظرية يستند النموذج؟
4. الطريقة: أي كيف يستخدم النموذج نظريته؟

ومنه يمكن استخلاص تعريف عملية النمذجة على أنها فن تبسيط الروابط والعلاقات بين متغيرات النظام الذي يشمل على: الموضوع، الهدف، النظرية والطريقة[1].

وتلعب عملية النمذجة دور مهم من خلال الفائدة التي تقدمها النماذج، حيث تعد طريقة علمية تستخدم في الكشف عن سلوك الأنظمة، ويأتي هذا من الرغبة في معرفة التطور الديناميكي لمختلف الظواهر، وفي مجال التخطيط فقد عمم استخدام النماذج نتيجة قدرة النماذج على وصف مختلف الأنظمة المتحكمة في الظواهر محل الدراسة، وتوضيح سلوكها بما يؤمن إعادة صياغة تلك النظرية واختبارها، والتحقق من أسباب التطورات واتجاهاتها.

[1] داديان تعريب علي محمد تقي القزويني، النماذج الاقتصادية العالمية OPU .1992 ص49

ومن جانب اخر تستخدم عملية النمذجة في الكشف عن الحالة المستقبلية لمختلف الظواهر والتي تم وصفها والتعرف على سلوكها، وتحديد درجة تطورها واتجاه هذا التطور. كما انها تساعد في تبيان نتائج مختلفة للبدائل في القرارات، وما يترتب على هذا من مساعدتنا في الاختيار بين هذه البدائل لرسم وتنفيذ مختلف السياسات والخطط الممكنة.

II. تعريف النموذج الاقتصادي:

يمكن تعريف النموذج الاقتصادي بأنه عبارة عن مجموعة من العلاقات التي تربط بين مجموعة من المتغيرات الاقتصادية، والتي يعبر عنها في صورة معادلات تشرح العلاقة بين هذه المتغيرات، فعلى سبيل المثال : النموذج الاقتصادي لسوق سلعة ما يتكون من ثلاث علاقات:

- ✓ دالة للطلب، $D = f(P)$
- ✓ دالة للعرض، $S = f(P)$
- ✓ شرط، التوازن والذي يتحقق عندما تتساوى الكمية المطلوبة من الكمية المعروضة، $D = S$

وتختلف النماذج الاقتصادية فيما بينها من حيث أنواع المتغيرات التي تحتويها والمعادلات التي تتكون منها، وحتى يمكننا أن نفهم الأنواع المختلفة للنماذج الاقتصادية فإن الأمر يتطلب أن نبدأ أولا بالتعرف على الأنواع المتغيرات، وكذلك الأنواع المختلفة من المعادلات، وبالتالي نكون في وضع يسمح لنا بالتعرف على أنواع النماذج الاقتصادية المختلفة

III. متغيرات النموذج:

تتضمن معادلة النموذج الاقتصادي العديد من المتغيرات الاقتصادية والتي تختلف باختلاف طبيعة المشكلة الاقتصادية المدروسة، وبصفة عامة يمكن تقسيم المتغيرات التي تحتويها مجموعة المعادلات لأي نموذج من النماذج الاقتصادية إلى نوعين من المتغيرات:[1]

أ. المتغيرات النظامية:

وهي تلك المتغيرات التي تدخل في توصيف النموذج الرياضي الذي يشرح الظاهرة المدروسة والتي يمكن للباحث ان يجمع حولها بيانات حول تغيرها عبر فترة الدراسة أي يشترط في مثل هذه المتغيرات توافر شرطان اساسيان:

- زمن التأثير على الظاهرة المدروسة
- حجم. التأثير على الظاهرة المدروسة

وتنقسم المتغيرات النظامية بدروها إلى نوعين أساسين من المتغيرات:

[1] عباس السيد، الاقتصاد القياسي- دار الجامعات المصرية – ص16

✓ **المتغيرات الداخلية:**

وهي تلك المتغيرات التي تتحدد داخل النموذج الاقتصادي، الذي يمثل الظاهرة محل الدراسة وذلك بعد معرفة التقديرات العددية لمعالم النموذج، وقيم المتغيرات الأخرى فيه. وينبغي الإشارة هنا إلى أن النموذج الاقتصادي يكون كاملا إذا تساوى فيه عدد المعادلات التي يتضمنها مع عدد المتغيرات الداخلية المطلوب شرحها للتعرف على القوى المؤثرة عليها.

✓ **المتغيرات المحددة سابقا:**

هي تلك المتغيرات التي لا تتحدد قيمتها عن طريق النموذج محل الدراسة، وإنما تتحدد بعوامل أخرى خارجية لم يتم ادخالها في النموذج، وبالتالي لا تعامل على أنها متغيرات بقدر ما تعامل على أنها معطيات أو ثوابت. ومعنى ذلك أن هذه المتغيرات تؤثر على المتغيرات الداخلية، ولكنها لا تتأثر بها. كما تصنف المتغيرات المحددة مسبقا إلى متغيرات خارجية ومتغيرات داخلية محددة في فترات سابقة أو ذات فترات ابطاء.

ب. المتغيرات العشوائية:

وهي تلك المتغيرات التي لا تظهر في المعادلات بصورة واضحة ومحددة المعنى، وهي التي يغيب عنها الشرطان الواجبا التوافر في المتغيرات النظامية. اين انها تلك المتغيرات التي يكون فيها الباحث لا يعرف زمن تأثير تلك المتغير على الظاهرة المدروسة وكذا لا يستطيع ان يعرف حجم تأثير المتغير على الظاهرة المدروسة ويتم التعبير عنها رياضيا بمتغير واحد يطلق عليه المتغير العشوائي، إذ أنه لا يعبر عن ظاهرة محددة أو مفهوم واضح، ولكنه يعبر عن حصيلة مجموعة كبيرة متنافرة من المتغيرات الأخرى[1].

IV. معادلات النموذج:

بعد وصف المتغيرات الاقتصادية الداخلة في النموذج ننتقل إلى تركيب المعادلات التي يحتويها النموذج، مع تحديد الشكل الرياضي الذي تأخذه هذه المعادلات، وفيما يلي أهم الأشكال الرياضية لهذه المعادلات:

- العلاقة الخطية: $Y_i = \alpha + \beta X_i$
- العلاقة الخطية بين y وبين مقلوب X_i: $Y_i = \alpha + \frac{\beta}{X_i}$
- العلاقة غير الخطية من الدرجة الثانية: $Y_i = \alpha + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2}$
- العلاقة الأسية: $Y_i = \alpha X_i^{\beta}$

ملاحظة: يمكن تحويل أي علاقة غير خطية إلى علاقة خطية، وذلك باستعمال عدة تحويلات رياضية، من أهمها النشر المحدود لتايلور. وتسمى المعادلات التي يتضمنها النموذج الاقتصادي بالمعادلات الهيكلية، ذلك نظرا لما تعرضه هذه المعادلات من هيكل أساسي للظواهر الاقتصادية محل الدراسة.

[1] عصام عزيز الشريف مقدمة في الاقتصاد القياسي (ط2) الجزائر OPU1981 ص07

ويختلف عدد المعادلات من نموذج إلى آخر تبعا لسهولة أو صعوبة تفسير الظاهرة الاقتصادية محل البحث، وتبعا للأهداف التي يسعى الباحث إلى تحقيقها من صياغته للنموذج الاقتصادي. ويمكن تقسيم المعادلات الهيكلية إلى ثلاث أنواع[1]:

أ. المعادلات السلوكية:

والمتمثلة في المعادلات التي تبين العلاقة الدالية بين المتغيرات المختلفة، وتكون هذه العلاقة ناشئة أساسا عن سلوك معين من جانب الافراد، أو من جانب العناصر المختلفة التي تؤثر على الدالة، وتظهر ردود فعلهم نتيجة للتغيرات التي تحدث في بعض المتغيرات، مثل: $C = f(Y)$

ب. المعادلات التعريفية:

وهو ذلك النوع من المعادلات الذي يعرف وضعا معنيا، أو يعرف متغيرا معنيا، أو يعطي قيمة محددة لأحد المتغيرات، ومن أمثلة المعادلات التعريفية، معادلات شرط التوازن في نماذج أسواق السلع المختلفة، والذي ينص على أن D=S. مثل هذه المعادلة لا تظهر سلوكا معينا أو رد فعل معين، ولكنها تكتفي بتعريف حالة توازن. وكذلك إذا عرفنا الدخل الوطني، بأنه : Y=C+I ، فإن هذه المعادلة لا تظهر سلوكا معينا، ولكنها تكتفي بتعريف الدخل الوطني بأنه يساوي ما ينفق على الاستهلاك، وما ينفق على الاستثمار.

ت. المعادلات الفنية:

وهو ذلك النوع من المعادلات الذي يبين علاقات فنية بحتة بين المتغيرات ومن امثلتها دالة الإنتاج وهي العلاقة القائمة بين حجم الإنتاج والعوامل الداخلة في إنتاجه، كما في دالة إنتاج كوب دوجلاس الآتية:

$$X_i = A q_{1i}^{\alpha} q_{k1}^{\beta} u_i \qquad i = 1,2 \dots \dots n$$

حيث : X_i: الكمية المنتجة من سلعة.

q_1 q_k : الكمية المستخدمة من عنصري: العمل ورأس المال على الترتيب.

V. أنواع النماذج الاقتصادية:

أ. النماذج الاقتصادية من حيث أنواع المتغيرات التي تحتويها

تنقسم النماذج الاقتصادية من حيث أنواع المتغيرات التي تحتويها إلى نوعين:

- ✓ **النماذج غير الاحتمالية:** هي تلك النماذج التي تبين وجود علاقات تامة بين المتغيرات المختلفة، ومثال على ذلك النماذج التي يفترض الاقتصاد القياسي وجودها.

[1] جمال فروخي: نظرية الاقتصاد القياسي: OPU.1992 ص01

- ✓ **النماذج الاحتمالية:** وهي تلك النماذج التي لا تفترض وجود علاقات تامة بين المتغيرات، وإنما تأخذ في اعتبارها إدخال العنصر أو المتغير العشوائي في العلاقة للتعبير عن أثر المتغيرات الأخرى التي لم تتضمنها العلاقة

بالإضافة إلى الاعتبارات المختلفة التي تدعو إلى إدخال مثل هذا المتغير. وهذا النوع من النماذج هو ما نهتم به في دراسة الاقتصاد القياسي.

ب. النماذج الاقتصادية من حيث عنصر الزمن

تقسيم النماذج الاقتصادية تبعا لعنصر الزمن إلى نوعين أساسيين:

- **النماذج الثابتة (الستاتيكية):**

وتعرف بأنها تلك النماذج التي تظهر حالة معينة في لحظة معينة دون أن تأخذ في الاعتبار أثر التغير في الزمن أو أثر الزمن على النموذج، ومن هنا فإن جميع المتغيرات الداخلة في تركيب معادلات النموذج الثابت (داخلية وخارجية) تكون بقيمتها الجارية.

- **النماذج الديناميكية:**

وتعرف بأنها تلك النماذج التي يظهر أثر الزمن فيها بصورة واضحة، بمعنى أنه لا يكتفي بمجرد إظهار الأثر النهائي للتغير الذي يمكن أن يحدث، ولكنه أيضا يبين كيفية الوصول إلى هذا التغير.

التمييز بين النموذج الاقتصادي والنموذج القياسي: النموذج الاقتصادي هو عبارة عن مجموعة من الفرضيات التي تشرح (بالتقريب) سلوك اقتصاد بلد ما أو قطاع اقتصادي معين. أما النموذج القياسي فيحتوي على ما يلي:

- ✓ مجموعة من المعادلات السلوكية أو التقنية مشتقة من النموذج الاقتصادي تحتوي هذه المعادلات على بعض المتغيرات المشاهدة والبعض الآخر غير مشاهدة نكتبه في شكل متغير عشوائي هو "عنصر الخطأ"
- ✓ تقرير مفصل حول ما إذا كانت هناك أخطاء في قياس ملاحظات المتغيرات المشاهدة. 3- تخصيص توزيع احتمالي لهذه الأخطاء العشوائية (أو أخطاء القياس).

VI. مراحل بناء النماذج الاقتصادية القياسية:

من الأهمية بمكان أن يتوفر لدى الاحصائي فكرة مبسطة عن منهج البحث القياسي التطبيقي، أي الخطوات أو المراحل التي ينبغي اتباعها والمشاكل التي يتعين التنبيه لها والأمور التي يحسن مراعاتها عند إجراء بحث اقتصادي تطبيقي باستخدام اساليب الاقتصاد القياسي. وبصفة عامة يمكن تقسيم خطوات بناء النماذج الاقتصادية القياسية إلى المراحل الأربع الأساسية الآتية:

أ. توصيف النموذج:

وتعتبر هذه المرحلة الخطوة الأولى للبحث في مجال الاقتصاد القياسي، كما أنها تعتبر أهم خطواته، حيث تعتمد عليها جميع المراحل التالية. ويتطلب توصيف أو صياغة النموذج تحديد الظاهرة المراد تفسيرها، والعوامل التي يمكن أن تساعد على تفسير سلوكها. ويحاول الباحث القياسي في هذه المرحلة دراسة العلاقة بين المتغيرات المختلفة والتعبير عن هذه العلاقة في صورة رياضية وهذا ما نعنيه بتوصيف النموذج.

ويعتمد توصيف النموذج على النظرية الاقتصادية، وعلى كل ما يتوفر لدينا من معلومات عن الظاهرة محل الدراسة، لذلك كان لزاما على الباحث القياسي أن يكون على دراية كبيرة بالنظرية الاقتصادية بصفة عامة، وبالظاهرة موضوع الدراسة بصفة خاصة. كما ينبغي على الباحث القياسي أن يجمع كافة البيانات أو المعلومات المتعلقة بالظاهرة محل الدراسة، بالإضافة إلى إلمامه بمختلف الدراسات المنشورة والتي سبق إجراءها بواسطة غيره من الباحثين، وتتضمن عملية توصيف النموذج ما يلي:

- ✓ تحديد المتغير التابع والمتغير أو المتغيرات المستقل التي ينبغي إدخالها في النموذج.
- ✓ معرفة التوقعات النظرية لما يمكن أن تكون عليه إشارات وقيم معالم الدوال، والتي سيتم على أساسها تقسيم التقديرات المتحصل عليها لمعالم النموذج.
- ✓ تحديد الشكل الرياضي للنموذج من حيث عدد المعادلات التي تحتوي عليها وكونها خطية أو غير خطية.
- ✓ تحويل النموذج الرياضي إلى نموذج احصائي أو احتمالي، وذلك بإدخال العنصر أو المتغير العشوائي، والذي يعبر عن الاعتبارات التي سبق الإشارة إليها مثل المتغيرات التفسيرية التي لم تدخل في المعادلة ويكون لها تأثيرها على المتغير التابع، الجزء غير المنتظم في السلوك الاقتصادي للإنسان،.....إلخ.

ب. تقدير معالم النموذج

بعد قيام الباحث بتوصيف النموذج للظاهرة محل الدراسة، وبعد أن يقوم بتحويله من الصورة الرياضية إلى الصورة الاحتمالية أو الاحصائية فإن الخطوة التالية هي تقدير معالم (أو معاملات) النموذج باستخدام الطريقة المناسبة للتقدير. وتتطلب هذه المرحلة من الباحث القياسي أن يكون ملما إلماما كاملا بكافة طرق القياس والفروض الخاصة بكل طريقة وتتضمن هذه المرحلة، ما يلي:[1]

- ✓ جمع البيانات عن جميع المتغيرات الداخلة في النموذج
- ✓ دراسة الشروط الخاصة بالتميز للدالة محل الدراسة
- ✓ اختيار الطريقة أو الأسلوب المناسب لتقدير معالم النموذج: ونعني بذلك أنه يتعين على الباحث القياسي أن يكون على دراية كبيرة بالطرق المختلفة لتقدير معالم النماذج والفروض الخاصة بكل طريقة، والمعنى الاقتصادي للتقديرات الخاصة بمعالم النموذج.

[1] مجيد حسين عفاف سعيد الاقتصاد القياسي النظرية والتطبيق، دار وائل للنشر، عمان، الأردن 1998، ط1،ص 35

ويعتبر إلمام الباحث بالطرق المختلفة للقياس أو التقدير عاملا هاما للحصول على تقديرات جيدة يمكن الاعتماد عليها ويمكن تقدير معاملات العلاقات الاقتصادية بعدد من الطرق يمكن تصنيفها إلى مجموعتين رئيسيتين:

☜ **طرق تقدير معالم المعادلة الواحدة**

وتطبق هذه الطرق لتقدير معلمات معادلة واحدة ومن أهم هذه الطرق: طريقة المربعات الصغرى العادية OLS، طريقة المربعات الصغرى غير المباشر ILS طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين 2SLS، طريقة الإمكان الأكبر للمعلومات المحدودة LIML

☜ **طرق تقدير معالم المعادلات الآنية**

وتطبق هذه الطرق لتقدير معلمات مجموعة من المعادلات الآنية، ومن أهم هذه الطرق: طريقة المربعات الصغرى على ثلاث مراحل ،3SLS، وطريقة الإمكان للمعلومات الكاملة FIML.

ويتوقف اختيار الطريقة المناسبة للتقدير على عدة عوامل أهمها:

- ✓ العلاقة بين المتغيرات
- ✓ خصائص المقدرات المتحصل عليها من كل طريقة من طرق التقدير وتوافر الفروض الخاصة بكل طريقة.
- ✓ بساطة الطريقة من حيث العمليات الحسابية اللازمة
- ✓ الوقت والتكاليف اللازمين لتقدير معلمات النموذج.

ت. تقييم نتائج التقديرات:

بعد الانتهاء من تقدير المعلمات باستخدام الطريقة القياسية المناسبة للتقدير، فإن المرحلة الثالثة للبحث القياسي هي تقييم هذه التقديرات المتحصل عليها بمعنى أن يقرر الباحث على أساس اختبارات معينة ما إذا كانت هذه التقديرات مرضية ويمكن قبولها والاعتماد عليها. وتنقسم الاختبارات التي يتم على أساسها تقييم تقديرات معلمات النموذج إلى ثلاث أقسام، هي:[1]

☜ **الاختبار الاقتصادي:**

وهذه المعايير تحددها النظرية الاقتصادية وتهتم بإشارات وقيم معلمات العلاقات، مثل: المرونات، والقيم الحدية والمضاعفات، وإذا ظهرت بعض التقديرات بإشارة مخالفة لما تقرره النظرية الاقتصادية، فإنه ينبغي في هذه الحالة رفض التقدير لتناقضه مع النظرية، إلا إذا كان هناك سبب قوي يمكن أن يستدل عليه.

[1] المرسى السيد الحجازي، عبد القادر محمد عطية" مقدمة في الاقتصاد القياسي: المبادئ والتطبيقات، الرياض، النشر العلمي والمطابع، 2001، ص 112.

وفي حالة رفض التقدير ذو الإشارة أو القيمة المخالفة لتوقعات النظرية فإنه يتعين إعادة النظر في صياغة العلاقة من حيث المتغيرات الداخلة فيها أو العلاقات الإضافية التي يمكن إدخالها في النموذج أو محاولة تقديرها من بيانات أخرى غالبا ما يعزى سوء التقدير إلى أخطاء في البيانات، كما ينبغي التحقق من مدى تطابق الفروض الخاصة بالأسلوب القياسي المستخدم في تقدير العلاقة، حيث قد يعزى الاختلاف إشارة التقدير لإسقاط فرض أو أكثر من هذه الفروض.

أ. الاختبار الاحصائي:

وهذا الاختبار تحدده النظرية الاحصائية ويهدف إلى تقييم التقديرات المتحصل عليها لمعلمات النموذج وكذا درجة ثقة في هذه التقديرات، ومن أهم المقاييس الاحصائية المستخدمة: معامل التحديد، والخطأ المعياري للتقدير. ويأتي الاختبار الاحصائي في المرتبة الثانية بعد الاختبار الاقتصادي فإذا جاءت تقديرات بعض المعلمات بإشارات أو قيم مخالفة فإنه يجب رفضها تماما حتى وإن كان معامل التحديد كبير أو كانت الاخطاء المعيارية للتقديرات صغيرة جدا، بحيث تجعل معالم العلاقة معنوية احصائيا، في مثل هذه الحالات تكون التقديرات غير مقبولة من الناحية الاقتصادية النظرية حتى ولو كانت المعالم معنوية احصائيا.

ب. الاختبار القياسي:

وهذا الاختبار تحددها نظرية الاقتصاد القياسي ويهدف إلى إرشاد الباحث إلى ما ينبغي أن تكون عليه التقديرات المتحصل عليها كعدم التحيز والاتساق وغير ذلك، كما يهدف إلى البحث عن مدى مطابقة فروض الأساليب القياسية المستخدمة والتي تختلف باختلاف الطرق القياسية، أي أن الاختبار القياسي له أهميته من الناحيتين:[1]

- أولا: أنه يحدد مدى امكانية الاعتماد على الادوات الاحصائية
- ثانيا: أنه يحدد مدى تحقق الخصائص المرغوبة فيها في التقديرات المتحصل عليها لمعلمات النموذج.

ث. تقييم القوة التنبؤية للنموذج:

وتعتبر هذه المرحلة الأخيرة في مراحل البحث القياسي، وتهتم بتقييم القوة أو الفترة التنبؤية للنموذج، إن الغرض من الحصول على تقديرات لمعالم النموذج هو إمكان استخدامها في التنبؤ بالقيم المستقبلية للمتغيرات أو بعبارة أخرى في اتخاذ القرارات. ويمكن تقييم أو اختبار القدرة التنبؤية للنموذج كما يلي:

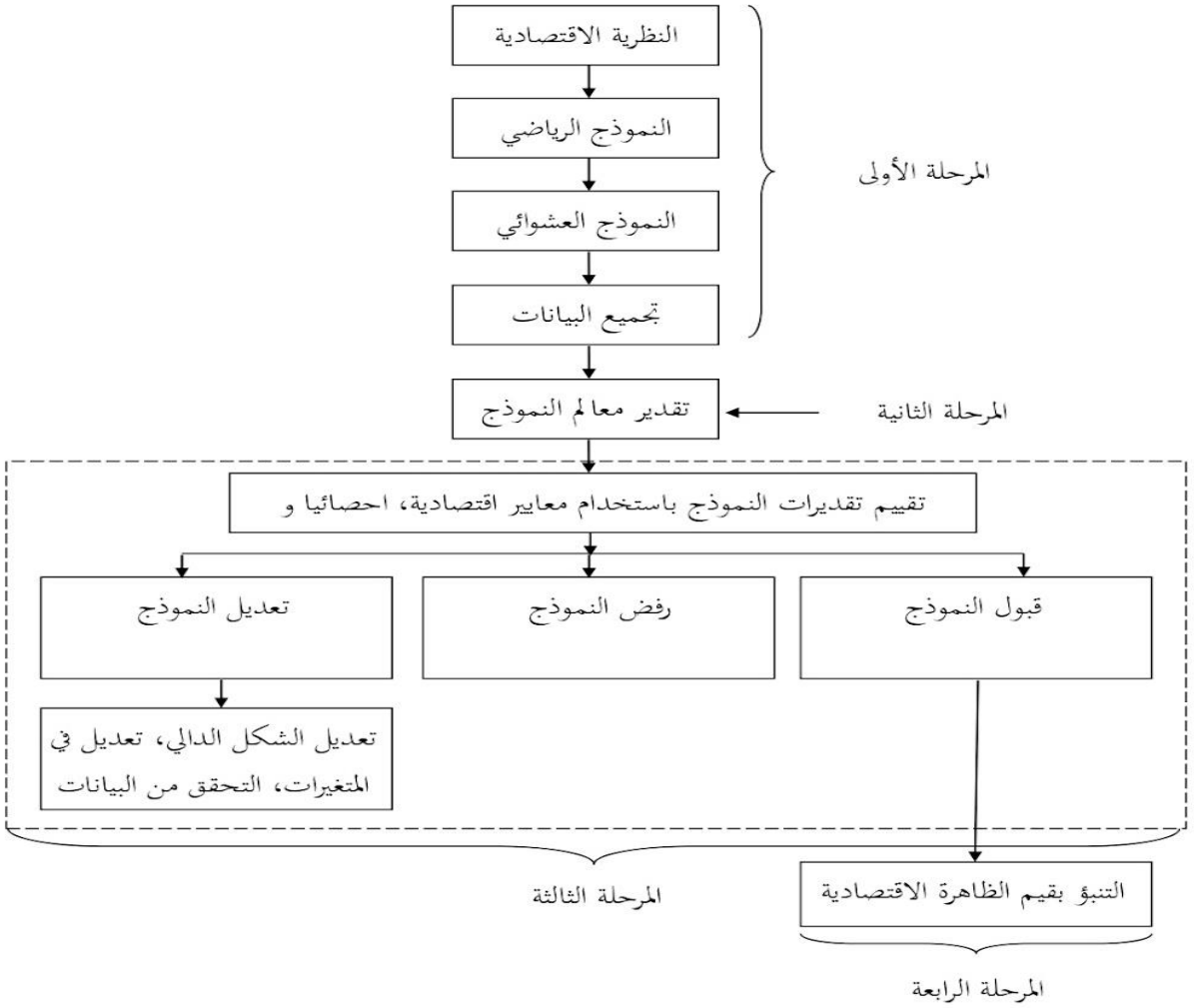
- ✓ قياس مدى استقرار التقديرات، أي مدى حساسيتها للتغير في حجم العينة، وتتلخص هذه الطريقة في إضافة مشاهدات أو بيانات جديدة للعينة الأصلية السابق استخدامها في تقدير معلمات النموذج، ثم إعادة عملية التقدير باستخدام العينة الجديدة (الأصلية مضافا إليها البيانات الجديدة)، ومن الطبيعي أن تختلف التقديرات المتحصل عليها في هذه الحالة عن تلك المتحصل عليها من بيانات العينة

[1] أموري هادي كاظم الحسناوي، طرق القياس الاقتصادي (عمان ، دار وائل للنشر، 2002)، ص 43

الأولى (الأصلية)، والفرق بين التقديرات يمكن اختباره احصائيا بالطرق الاحصائية المناسبة، فإذا كان الفرق معنويا دل ذلك على ضعف القوة التنبؤية للنموذج.

- ✓ وتتلخص هذه الطريقة في استخدام التقديرات المتحصل عليها من بيانات العينة في النموذج لفترة أخرى لا تدخل في فترة العينة الأولى، ثم نقارن القيم المتحصل عليها للمتغير التابع (قيم التنبؤ) بالقيم الفعلية له وعادة ما يكون هناك اختلاف بين القيم المقدرة (قيم التنبؤ) والقيم الفعلية، والفرق بين القيم المحسوبة والفعلية يمكن عمل اختبار لمعرفة ما إذا كان معنويا احصائيا، فإذا وجدنا بعد إجراء الاختبار الاحصائي أن الفرق المعنوي، فإننا نستنتج أن القدرة التنبؤية للنموذج ضعيفة.

وبعد أن استعراضنا للمراحل الأربعة الأساسية لعملية بناء نموذج اقتصادي قياسي، فإنه يمكننا توضيح هذه الخطوات في الشكل التالي:



المحور الثاني:

نماذج الإنحدار الخطي البسيط

محاضرات في نمذجة الظواهر الاقتصادية

1. النموذج الرياضي:

تقترح علينا النظرية الإقتصادية بأن المتغير التابع هو الكمية المعروضة (Y) أما المتغير المستقل فهو سعرها (X)

$$Y = f(X)$$

وإذا فرضنا أن السعر هو المحرك الأساسي لتغير الكميات المعروضة يكون الشكل الرياضي لدالة العرض كما يلي:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i$$

وتكون (α, β) هي معالم الدالة وهدفنا هو الحصول على مقدرات عددية لها $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ على الترتيب ويجب أن تكون قيمة $(\hat{\alpha})$ إما صفرا أو قيمة موجبة، ولا تأخذ $(\hat{\alpha})$ قيمة سالبة. فإذا كانت هذه الأخيرة سالبة، يجب عدم الأخذ بذلك الجزء من الدالة نظرا لمخالفتها للمعنى الإقتصادي. وتعتبر قيمة $(\hat{\alpha})$ أساسية (ضرورية) لتحديد مرونة السعر في دالة العرض.

وننتظر أن تكون قيمة $(\hat{\beta})$ موجبة لأن منحنى العرض يتجه (يميل) لأعلى في أغلب الأحيان.

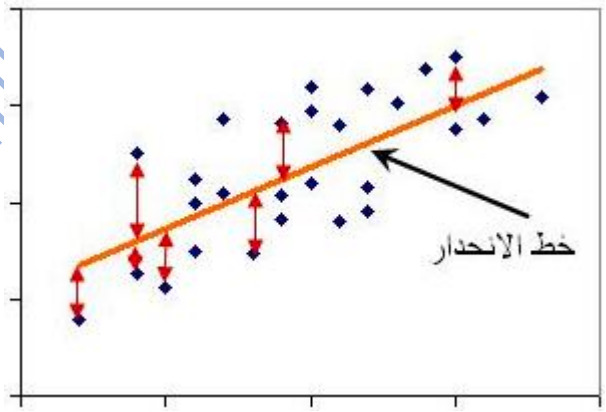
ومن المهم جدا معرفة العلاقة مابين مرونة السعر لدالة العرض ومقدرات المعالم $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ حيث نعرف المرونة على الشكل :

$$\eta_p = \frac{dY}{dX}\frac{\overline{X}}{\overline{Y}}$$

ومن معادلة العرض نجد: $\beta = dY/dX$ .....

وتصبح مرونة السعر: $\eta_p = \beta \overline{X}/\overline{Y}$ .....

أما مقدر مرونة السعر فيصبح: $\hat{\eta}_p = \hat{\beta} \overline{X}/\overline{Y}$ .....



(شكل 1)

إن الشكل السابق لدالة العرض $Y_i = \alpha + \beta X_i$ ، يعني أن العلاقة بين الكمية المعروضة وسعرها هي علاقة دقيقة. وإذا كان هذا صحيحا، فإن كل زوج من النقاط (X, Y) يجب أن يقع على خط مستقيم. لكن إذا أخذنا البيانات الموجودة (شكل 1) ، فإنها تعطي شكلا إنتشاريا يقترب من الخط المستقيم. لكن بعض هذه النقاط (X, Y) تنحرف بالسلب (أو بالموجب) عن هذا الخط وذلك لعدة عوامل مثل: حذف متغيرات أخرى

من المعادلة، التصرف العشوائي للأفراد، خطأ في تخصيص الشكل الرياضي للنموذج، أخطاء في تجميع البيانات، أخطاء في القياس وغيرها. ولإبطال (تخفيض) مفعول العوامل المذكورة أعلاه يجب إضافة عنصر الاضطراب (الخطأ) العشوائي إلى معادلة العرض ويرمز له بالرمز (U) ليصبح النموذج:[1]

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + U_i \qquad (1.2)$$

2. الفرضيات الأساسية للنموذج:

ليكن النموذج في المعادلة (1.2) ونضع الفرضيات التالية:

أ. إن الخطأ (U_i) هو متغير عشوائي، وقد تكون قيمته موجبة أو سالبة ويكون الوسط الحسابي للخأ مساوي للصفر أي:

$$E(U_i) = 0$$

ب. يكون تباين الأخطاء ثابتا في كل فترة, أي تجانس تباينات الأخطاء أي أن:

$$E(U_I^2) = \sigma_u^2$$

ت. إنعدام الإرتباط الذاتي للأخطاء, أي أن:

$$E(U_i, U_j) = 0 : i \neq j$$

ث. تتوزع الأخطاء (U_i) توزيعا طبيعي أي:

$$U_i \rightarrow N(0, \sigma_u^2)$$

ج. إنتظام قيم المتغر المستقل (X) وعدم تغيرها من عينة لأخرى ، وأنه مهما اختلف حجم العينة تكون القيمة:

$\left(\frac{1}{n}\Sigma(X_i - \overline{X})^2\right)$ عبارة عن رقم نهائي غير مساوي للصفر.

3. توزيع المتغير التابع Y :

لدينا النموذج البسيط :

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + U_i$$

وإذا أدخلنا التوقع الرياضي نحصل على الوسط الحسابي للمتغير التابع Y :

$$E(\alpha + \beta X_i) + E(U_i)\ E(Y_i) = E(\alpha + \beta X_i + U_i) =$$

ونظرا إلى أن (α, β) هي معالم حقيقية (للمجمع) , و (X_i) هي قيم مثبتة فتصبح

$$\alpha + \beta X_i\ E(\alpha + \beta X_i) =$$

ومستعملين الفرضية (a) تصبح: $E(U_i) = 0$

$$E(Y_i) = \alpha + \beta X_i$$

- أما التباين فيعرف:

$$= E[(\alpha + \beta X_i + U_i) - (\alpha + \beta X_i)]^2 = E(U_i)^2 = \sigma_u^2 \ \text{var}(Y_i) = E[Y_i - E(Y_i)]^2$$

[1] أموري هادي كاظم الحسناوي، مرجع سبق ذكره ص 56،

- ومنه فإن شكل توزيع (Y_i) يحدد بواسطة (U_i) (والتي تخضع للتوزيع الطبيعي) وذلك لأن (α,β) هي ثوابت لا تؤثران على شكل توزيع (Y_i) وكذلك فإن قيم (X_i) ثابتة

ومنه تصبح:

$$Y_i \to N(E(Y_i), \text{var}(Y_i))$$
$$Y_i \to N((\alpha+\beta X_i), \sigma_u^2)$$

4. تقدير النموذج الخطي طريقة المربعات الصغرى:

1- تقدير معالم النموذج:

بناءا على المعادلة: $\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i$.

حيث أن $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ هي مقدرات المعالم (α,β) على التوالي, و $(\hat{Y}_i)$ هي القيمة التقديرية للكمية المعروضة.

- نعرف الفرق بين النقطة $p(X_i,Y_i)$ والخط المقدر $(\hat{\alpha}+\hat{\beta}X_i)$ ب: $PR = Y_i - \hat{Y}_i = e_i = \hat{U}_i$

وتسمى بواقي المربعات الصغرى العادية.

- إن مهمة المربعات الصغرى العادية هي أن نختار قيم $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ بطريقة تجعل $\sum e_i^2$ أصغر ما يمكن، والشرط الضروري لذلك هو أن مشتق هذه القيمة بالنسبة $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ يكون سفرا أي :

$$\sum e_i^2 = \sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i)$$
$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\alpha}} = 2n\hat{\alpha} - 2\sum Y_i + 2\hat{\beta}\sum X_i = 0$$
$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}} = 2\hat{\beta}\sum X_i^2 - 2\sum X_i Y_i + 2\hat{\alpha}\sum X_i = 0$$

وبإعادة ترتيبها نحصل على المعادلات الطبيعية للمربعات الصغرى.

$$\left.\begin{aligned}\sum Y_i &= n\hat{\alpha} + \hat{\beta}\sum X_i \\ \sum Y_i X_i &= \hat{\alpha}\sum X_i + \hat{\beta}\sum X_i^2\end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2.3)$$

وبحلهما آنيا نحصل على المقدرتين $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ كما يلي:

$$\hat{\beta} = (\sum X_i Y_i - \bar{Y}\sum X_i)/(\sum X_i^2 - \bar{X}\sum X_i) \qquad (2.4)$$
$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} \qquad (2.5)$$

- وإذا أخذنا الإنحرافات نجد:

$$x_i = (X_i - \bar{X}), y_i = (Y_i - \bar{Y}), \hat{y}_i = (\hat{Y}_i - \bar{Y})$$

وتصبح معادلة الخط المقدر للمربعات الصغرى على الشكل:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}x_i \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{إذن} \qquad (2.6)$$
$$\sum e_i^2 = \sum \hat{U}_i^2 = \sum(y_i - \hat{\beta}x_i)^2$$

وبعد تصغير هذه المعادلة ومساواتها بالصفر نجد:

$$\hat{\beta} = \sum x_i y_i / \sum x_i^2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2.7)$$

كما أن المشتقة الثانية بالنسبة ل $(\hat{\beta})$ هي:

$$\frac{\partial^2 \sum e_i^2}{\partial \beta^2} = 2\sum x_i^2 \rangle 0 \leftarrow$$

أي أن أصغر قيمة قد تحققت (نهاية صغرى)

5. تباينات المقدرات:

1- تباين المقدر $(\hat{\beta})$

من المعادلة (2.7)لدينا : $\hat{\beta} = \sum x_i y_i / \sum x_i^2 = \sum x_i (Y_i - \overline{Y}) / \sum x_i^2$

وما دام $\sum x_i = 0$ فإن : $\hat{\beta} = \sum x_i Y_i / \sum x_i^2 = \sum x_i (\alpha + \beta X_i + U_i) / \sum x_i^2$

$= [\alpha \sum x_i + \beta \sum x_i X_i + \sum x_i U_i / \sum x_i^2]$

ولدينا: $X_i = (x_i - \overline{X})$ إذن: $\hat{\beta} = [(\beta \sum x_i (x_i - \overline{X}) + \sum x_i U)_i / \sum x_i^2]$

$\hat{\beta} = [(\beta \sum x_i^2 + \beta \overline{X} \sum x_i + \sum x_i U)_i / \sum x_i^2]$

$\hat{\beta} = \beta + \sum x_i U_i / \sum x_i^2$ (2.8)

ومنه فإن: $\hat{\beta} - \beta = \sum x_i U_i / \sum x_i^2$

ويصبح الوسط الحسابي للمقدر $(\hat{\beta})$ على شكل: $E(\hat{\beta} - \beta) = E(\sum x_i U_i / \sum x_i^2) = (\sum x_i / \sum x_i^2) E(U_i)$

إذن $E(\hat{\beta}) = \beta$ (2.9)

أي أن طريقة المربعات الصغرى أعطت تقدير غير متحيز بالنسبة للمعلمة (β)

أما تباين $(\hat{\beta})$ فيعرف على شكل: $\text{var}(\hat{\beta}) = E[\hat{\beta} - E(\hat{\beta})]^2$

وبإستعمال المعادلة (2.9) نجد $[\sum x_i U_i / \sum x_i^2]^2$

ولدينا العبارة:

$$[\sum x_i U_i / \sum x_i^2]^2 = \left[\frac{x_1^2 U_1^2}{(\sum x_i^2)^2} + \frac{x_2^2 U_2^2}{(\sum x_i^2)^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{x_n^2 U_n^2}{(\sum x_i^2)^2} + \frac{2x_1 x_2 U_1 U_2}{(\sum x_i^2)^2} + \ldots\ldots \frac{2x_{n-1} x_n U_{n-1} U_n}{(\sum x_i^2)^2}\right]$$

$$[\sum x_i U_i / \sum x_i^2]^2 = \left[\frac{x_1^2 U_1^2}{(\sum x_i^2)^2} + \frac{x_2^2 U_2^2}{(\sum x_i^2)^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{x_n^2 U_n^2}{(\sum x_i^2)^2} + 0 + \ldots\ldots 0\right]$$

وباستعمال الفرضيات (b)، (c)، (e). ويصبح التباين:[1]

$$\text{var}(\hat{\beta}) = \sigma^2 \sum x_i^2 / (\sum x_i^2)^2 = [\sigma^2 / \sum x_i^2]$$

2- تباين المقدرة $(\hat{\alpha})$

من المعادلة (2.5) نجد : $\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X}$ .....

$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \overline{X} \sum x_i Y_i / \sum x_i^2 = (\sum Y_i / n) - \overline{X} \sum (X_i - \overline{X}) Y_i / \sum x_i^2$

$= \sum [(1/n) - \overline{X} \sum (X_i - \overline{X}) / \sum x_i^2] Y_i$

نسمي العبارة $M_i = [(1/n) - \overline{X} \sum (X_i - \overline{X}) / \sum x_i^2]$

وتصبح الكتابة الخطية للمقدرة $(\hat{\alpha})$ على الشكل : $\hat{\alpha} = \sum M_i Y_i$

نقوم بحساب التوقع الرياضي ل $(\hat{\alpha})$ $E(\hat{\alpha}) = E(\sum M_i Y_i)$

[1] شيخي محمد طرق الاقتصاد القياسي محارات وتطبيقات الجزائر، دار الحامد، الطبعة الاولى 2011، ص112

$$E(\hat{\alpha}) = E[\sum M_i(\alpha + \beta X_i + U_i)] = E[\alpha \sum M_i + \beta \sum M_i X_i + \sum M_i U_i]$$
$$E(\hat{\alpha}) = E(\alpha \sum M_i) + E(\beta \sum M_i X_i) + E(\sum M_i U_i)$$
$$E(\hat{\alpha}) = (\alpha \sum M_i) + (\beta \sum M_i X_i) + (\sum M_i E(U_i))$$

وباستخدام الفرضية القائلة أن التوقع الرياضي للمتغير العشوائي يساوي الصفر :

$$E(\hat{\alpha}) = (\alpha \sum M_i) + (\beta \sum M_i X_i)$$

وحتى يكون: $[E(\hat{\alpha}) = \alpha]$ يجب أن يتحقق الشرطان التاليان :

$$\sum M_i = 1, \sum M_i X_i = 0$$

برهان الشرط الأول:

$$\sum M_i = \sum\left[\left(\frac{1}{n}\right) - \left(\frac{\bar{X} x_i}{\sum x_i^2}\right)\right] = \left[\left(\frac{n}{n}\right) - \left(\frac{\bar{X}\sum x_i}{\sum x_i^2}\right)\right] = \left(\frac{n}{n}\right) = 1 ....: \sum x_i = 0$$

حيث أن

$$\sum x_i = \sum(X_i - \bar{X}) = \sum X_i - n\bar{X}$$

وحتى تكون هذه العلاقة محققة يكفي البرهان على أن

$$\sum X_i = n\bar{X}$$

ومن الصيغة الرياضية للوسط الحسابي $(\bar{X} = \sum X_i / n)$ نجد أن $[\sum X_i = n\bar{X}]$ ومنه فان :

$$[\sum M_i = 1]$$

برهان الشرط الثاني :

$$\sum M_i X_i = \sum\left[\left(\frac{1}{n}\right) - \left(\frac{\bar{X} x_i}{\sum x_i^2}\right)\right] X_i = \left[\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) - \left(\frac{\bar{X}\sum x_i X_i}{\sum x_i^2}\right)\right] = \bar{X} - \bar{X}\frac{\sum x_i X_i}{\sum x_i^2} = 0$$

حيث أن $[\sum x_i X_i / \sum x_i^2] = 1$ ....

وحتى تكون هذه العلاقة محققة يكفي البرهان على أن: ....

$$[\sum x_i X_i = \sum x_i^2]$$

لدينا : .... $\sum x_i X_i = \sum(X_i - \bar{X}) X_i = \sum X_i^2 - \bar{X}\sum X_i$ ....

ولدينا: $\sum x_i^2 = \sum(X_i - \bar{X})^2 = \sum(X_i^2 + \bar{X}^2 - 2\bar{X}X_i) = \sum X_i^2 + \bar{X}\sum X_i - 2\bar{X}\sum X_i = \sum X_i^2 - \bar{X}\sum X_i$

ومنه: .... $[\sum x_i X_i = \sum x_i^2] \Rightarrow [\sum x_i X_i / \sum x_i^2] = 1$

ومنه يصبح (التوقع الرياضي) الوسط الحسابي للمقدرة $(\hat{\alpha})$ على شكل: $E(\hat{\alpha}) = \alpha + \sum M_i E(U_i)$

ومستعملين الفرضية (a) تصبح: $E(U_i) = 0$ نخلص إلى أن : .... $E(\hat{\alpha}) = \alpha$

أي أن طريقة المربعات الصغرى أعطت تقدير غير متحيز بالنسبة للمعلمة (α)

- أما تباين $(\hat{\alpha})$ فيصبح: $\text{var}(\hat{\alpha}) = E[\hat{\alpha} - E(\hat{\alpha})]^2 = E(\hat{\alpha} - \alpha)^2 = E(\sum M_i U_i)^2$

ومادام العبارة $[\ ]^2$ تحل إلى المقدار التالي:

$$[\sum M_i U_i]^2 = [M_1^2 U_1^2 + M_2^2 U_2^2 + ...+ M_n^2 U_n^2 + 2M_1 M_2 U_1 U_2 + ...+ M_{(n-1)} M_n U_{(n-1)} U_n]$$

ببعد إدخال التوقع الرياضي نجد:

$$E[\sum M_i U_i]^2 = E[M_1^2 U_1^2 + M_2^2 U_2^2 + ...+ M_n^2 U_n^2 + 2M_1 M_2 U_1 U_2 + ...+ M_{(n-1)} M_n U_{(n-1)} U_n]$$
$$E[\sum M_i U_i]^2 = [M_1^2 E(U_1^2) + M_2^2 E(U_2^2) + ...+ M_n^2 E(U_n^2) + 2M_1 M_2 E(U_1 U_2) + ...+ M_{(n-1)} M_n E(U_{(n-1)} U_n)]$$

وباستعمال الفرضيات (b)، (c)، (e). ويصبح التباين :

$$\text{var}(\hat{\alpha}) = E[\sum M_i U_i]^2 = [\sigma_u^2 M_1^2 + \sigma_u^2 M_2^2 + ...+ \sigma_u^2 M_n^2 + 0 + ...+ 0]$$

محاضرات في نمذجة الظواهر الاقتصادية

$\text{var}(\hat{\alpha}) = E[\sum M_i U_i]^2 = \sigma_u^2[M_1^2 + M_2^2 + ...+ M_n^2] = [\sigma_u^2 \sum M_i^2]$

ومنه نستنتج أن المقدرتين $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ هما مقدرتي (α,β) على التوالي، غير المتميزين إي $E(\hat{\alpha}) = \alpha$ ، $E(\hat{\beta}) = \beta$

3- **التباين المشترك للمقدرتين** $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$

- نعرف التباينالمشترك للمقدرتين $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ على الشكل: $\text{cov}(\hat{\alpha},\hat{\beta}) = E[(\hat{\alpha} - E(\hat{\alpha}))(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))]$

وباستعمال (8، 2) و (11 ، 2) نجد : $E[(\hat{\alpha} - E(\hat{\alpha}))(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))] = E[(\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\beta} - \beta)]$

$$\text{cov}(\hat{\alpha},\hat{\beta}) = E[(\sum M_i U_i)(\sum w_i U_i)] = E\left[\sum\left(\frac{1}{n} - \overline{X} w_i\right) U_i (\sum w_i U_i)\right] = E\left[\left(\frac{\sum w_i U_i^2}{n} - \overline{X}\sum w_i^2 U_i^2\right)\right]$$

$$\text{cov}(\hat{\alpha},\hat{\beta}) = \left[\left(\frac{\sum w_i E(U_i^2)}{n} - \overline{X}\sum w_i^2 E(U_i^2)\right)\right] = \sigma_u^2\left(\frac{\sum w_i}{n}\right) - \sigma_u^2 \overline{X}\sum w_i^2 = \left(-\sigma_u^2 \overline{X}\sum w_i^2\right)$$

علما أن : $\sum w_i = \sum x_i / \sum x_i^2$ وأن: $\sum x_i = \sum(X_i - \overline{X}) = \sum X_i - n\overline{X} = 0$ ومنه فان: $\sum w_i = 0$

ومنه فان التباين المشترك للمقدرتين $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ هو المقدار (2.14) $\text{cov}(\hat{\alpha},\hat{\beta}) = -\sigma_u^2 \overline{X}\sum w_i^2$.

6. أفضل مقدر خطي غير متحيز (أو نظرية قوس- ماركوف):[1]

تقول نظرية قوس ماركوف: بوجود الفرضيات الأساسية a، b، c، e فإن المقدرتين $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ تعتبران أحسن (أفضل) مقدرات خطية غير متحيزة ل (α,β) بحيث يكون لهما أصغر تباين من كل المقدرات الخطية غير المتحيزة الأخرى.

نعرف عشوائيا أي مقدر خطي على شكل:

$$\hat{\hat{\beta}} = \sum C_i Y_I \qquad (2.15)$$

حيث أن: $C_I = w_i + d_i$ (2.16)

$w_i = x_i / \sum x_i^2$. (2.17)

إن المتغير (w_i) هو عبارة عن قيم ثابتة غير متحركة في كل العينات المتكررة ولها الخصائص التالية:

$\sum w_i = 0, \sum w_i^2 = 1/\sum x_i^2, \sum w_i x_i = \sum w_i X_i = 1$ .....(2، 18)

وبناء على المعادلة (2.17) فإن مقدر المربعات الصغرى العادية $(\hat{\beta})$ يصبح،

$\hat{\beta} = \sum w_i Y_i$ ..... (2.18).

أما (d_i) فهو عبارة عن ثابت عشوائي مختار.

- لكي يكون $\left(\hat{\hat{\beta}}\right)$ مقدر (β) غير المتحيز يجب أن تتوفر بعض الشروط في (d_i):

$$\hat{\hat{\beta}} = \sum C_i(\alpha + \beta X_i + U_i) = \alpha\sum C_i + \beta\sum C_i X_i + \sum C_i U_i$$

$$E\left(\hat{\hat{\beta}}\right) = E[\alpha\sum C_i + \beta\sum C_i X_i + \sum C_i U_i] = \alpha\sum C_i + \beta\sum C_i X_i + \sum C_i E(U_i)$$

$$E\left(\hat{\hat{\beta}}\right) = \alpha\sum C_i + \beta\sum C_i X_i = \beta$$

[1] صالح تومي، مدخل لنظرية القياس الاقتصادي، الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1999 ص67

- تكون هذه العبارة الأخيرة صحيحة من أجل (α,β) إذا وفقط إذا كان: $\sum C_i = 0, \sum C_i X_i = 1$

- هذين الشرطين المرتبطين بالمعادلة (2.16)، مع خصائص (w_i) الموجودة في (2.18) تعطي الشروط التي يجب أن توفر في (d_i) وهي: $\sum d_i = 0, \sum d_i X_i = \sum d_i x_i = 0$ ..... (2 ، 20)

إذن تباين هذا المقدر العشوائي $\left(\hat{\hat{\beta}}\right)$ غير المتحيز هو:

$$\text{var}\left(\hat{\hat{\beta}}\right) = E\left[\hat{\hat{\beta}} - E\left(\hat{\hat{\beta}}\right)\right]^2 = E\left(\hat{\hat{\beta}} - \beta\right)^2 = E\left(\sum C_i U_i\right)^2 = \sigma_u^2 \sum C_i^2$$

لكن من المعادلة (2.16) لدينا:

$$\sum C_i^2 = \sum (w_i + d_i)^2 = \sum \left(w_i^2 + d_i^2 + 2 w_i d_i\right) = \sum w_i^2 + \sum d_i^2 + 2 \sum w_i d_i$$

وبإستعمال (2.20) نجد: $\sum C_i^2 = \sum w_i^2 + \sum d_i^2 \ldots\ldots : \sum w_i d_i = 0$

.

ويكون:(21 ، 2)

$$\text{var}\left(\hat{\hat{\beta}}\right) = \sigma_u^2 \sum C_i^2 = \sigma_u^2 \sum w_i^2 + \sigma_u^2 \sum d_i^2 = \text{var}\left(\hat{\beta}\right) + \sigma_u^2 \sum d_i^2$$

من المؤكد أن $\left(\sum d_i^2\right)$ غير سالبة وتساوي الصفر فقط إذا كانت كل قيمة ل (d_i) تساوي الصفر. إذن يكون لمقدر المربعات الصغرى العادية أصغر تباين على كل المقدرات الخطية غير المتحيزة الأخرى. ويمكن الحصول على نفس النتائج بالنسبة ل $(\hat{\alpha})$

وهناك طرق أخرى لإيجاد أفضل مقدر خطي غير متحيز (BLUE) مباشرة وتتطابق مع مقدرات المربعات الصغرى العادية. فإذا أخذنا الفرضيات السابقة مع المعادلة (2.1) وعرفنا مقدر المربعات الصغرى العادية على الشكل. $\hat{\beta} = \sum C_i Y_i$ حيث أن $\left(\hat{\beta}\right)$ هو مقدر المربعات الصغرى غير المتحيز فتكون المشكلة هنا هي كمية إختيار المرجحات (C_i) لجعل $\left(E\left(\hat{\beta}\right) = \beta\right)$ وكذلك لجعل $\left(\text{var}\left(\hat{\beta}\right)\right)$ أصغر ما يمكن. ومن النموذج الأصلي لدينا:

$$\hat{\beta} = \sum C_i Y_i = \alpha \sum C_i + \beta \sum C_i X_i + \sum C_i U_i$$

$$E\left(\hat{\hat{\beta}}\right) = \alpha \sum C_i + \beta \sum C_i X_i$$

إذن $\left(\hat{\beta}\right)$ هو مقدر (β) غير المتحيز إذا وفقط إذا كانت:

$$\sum C_i = 0, \sum C_i X_i = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.22)$$

وباستعمال هذين الشرطين نجد: $\text{var}\left(\hat{\beta}\right) = \sigma_u^2 \sum C_i^2$ .....

وتبقى مشكلتنا هنا هي تصغير $\left(\text{var}\left(\hat{\beta}\right)\right)$ تبعا للشرطين الموجودين في (2.22) ومنه نعرف الدالة اللاغرانجية:[1]

$$\phi = \sum C_i^2 - 2\lambda \sum C_i - 2\mu\left(\sum C_i X_i - 1\right)$$

حيث أن (μ,λ) هما مضاعفات لاغرانج نشتق (ϕ) جزئيا بالنسبة (μ,λ,C_i) وتساويها بالصفر لنحصل على المعادلات:

[1] صالح تومي، مدخل لنظرية القياس الاقتصادي مرجع سبق ذكره ص 76

$$C_i = \lambda + \mu X_i \quad \text{.....} \quad (2.23)$$

$$\sum C_i = 0 \quad \text{.....} \quad (2.24)$$

$$\sum C_i X_i = 1 \quad \text{.....} \quad (2.25)$$

ونجمع المعادلات (2.23) بالنسبة لكل (i) نجد: $\lambda = -\mu \overline{X}$

وبتعويضها من جديد في (2.23) نحصل على: $C_i = \mu(X_i - \overline{X}) = \mu x_i$

- بضرب الطرفين ب (X_i) وجمعهما بالنسبة لكل (i) (مستعملين (2.25)) نجد:

$$\mu \sum x_i X_i = \sum C_i X_i = 1$$

$$\mu = 1/\sum x_i x_i = 1/\sum x_i^2$$

لتصبح: $C_i = x_i / \sum x_i^2 = w_i$ ..... (2.26)

ومنه نرى بأن المرجحات (C_i) متطابقة مع مرجحات المربعات الصغرى (w_i) في المعادلة (2.17). إذن أحسن مقدر خطي غير متحيز ل (β) هو: $\hat{\beta} = \sum x_i Y_i / \sum x_i^2$ .....

7. تباين الخطأ العشوائي (U_i):

لدينا من الشكل (2.1) $Y_i = \hat{Y}_i + e_i$

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + U_i$$

وبأخذ معدل(متوسط) $Y_i = \alpha + \beta X_i + U_i$ من (n) عينة نحصل على: $\overline{Y} = \alpha + \beta \overline{X} + \overline{U}$ .....

إذن: $y_i = \alpha + \beta x_i + (U_i - \overline{U})$

ونعرف أن: $e_i = y_i - \hat{\beta} x_i$

لتصبح: $e_i = -(\hat{\beta} - \beta) x_i + (U_i - \overline{U})$

- وبتربيع (e_i) وجمعها بالنسبة لكل (i) نجد:

$$\sum e_i^2 = (\hat{\beta} - \beta)^2 \sum x_i^2 + \sum (U_i - \overline{U})^2 - 2(\hat{\beta} - \beta) \sum x_i^2 (U_i - \overline{U})$$

وبأخذ التوقع الرياضي لكل مقدرات في الطرق الآتيين نحصل على:

باستعمال (2.10) $a)...E(\hat{\beta} - \beta)^2 \sum x_i^2 = \text{var}(\hat{\beta}) \sum x_i^2 = \sigma_u^2$

$$b)...E\left[\sum (U_i - \overline{U})^2\right] = E\left[\sum (U_i^2 - 2\overline{U} U_i + \overline{U}^2)\right] = E\left[\sum (U_i^2 - (2/n)(\sum U_i) U_i) + (1/n^2)(\sum U_i)^2\right]$$

$$\Rightarrow ....E\left[\sum (U_i - \overline{U})^2\right] = E\left[\sum U_i^2 + (2/n)(\sum U_i)^2 + (1/n^2) \sum (\sum U_i)^2\right]$$

$$\Rightarrow ....E\left[\sum (U_i - \overline{U})^2\right] = \left[\sum E(U_i^2) + (2/n) \sum E(U_i)^2 + (1/n^2) \sum \sum E(U_i)^2\right]$$

$$\Rightarrow ....E\left[\sum (U_i - \overline{U})^2\right] = \left[n\sigma_u^2 + (2/n) n \sigma_u^2 + (1/n^2) n^2 \sigma_u^2 = (n-1)\sigma_u^2\right]$$

$$c)...E\left[(\hat{\beta} - \beta) \sum x_i^2 (U_i - \overline{U})\right] = E\left[(\sum x_i U_i / \sum x_i^2)(\sum x_i U_i - \overline{U} \sum x_i)\right] = (1/\sum x_i^2) E(\sum x_i U_i)^2$$

$$\Rightarrow ....E\left[(\hat{\beta} - \beta) \sum x_i^2 (U_i - \overline{U})\right] = (1/\sum x_i^2)(\sum x_i^2 E(U_i)^2) = \sigma_u^2$$

إذن نجد: $E(\sum e_i^2) = a + b + 2c = \sigma_u^2 + (n-1)\sigma_u^2 - 2\sigma_u^2 = (n-2)\sigma_u^2$

أي أن $\Rightarrow (1/(n-2)) E(\sum e_i^2) = \sigma_u^2 \Rightarrow E(\sum e_i^2/(n-2)) = E\hat{\sigma}_u^2 = \sigma_u^2$

ومنه نستنتج (2.27) $\hat{\sigma}_u^2 = \sum e_i^2/(n-2)$ .....

ويكون $(\hat{\sigma}_u^2)$ هو مقدر (σ_u^2) غير المتحيز.

8. التقدير بطريقة المعقولية العظمى:

- لحد الآن لم نتحدث عن الفرضية (d) (فرضية التوزيع الطبيعي) حول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي: (U_i) فإذا كانتا (U_i) تتبع التوزيع الطبيعي $U_i \to N(0,\sigma_u^2)$ فإن التابع (Y_i) يكون كذلك حيث أن:

$$Y_i \to N(\alpha+\beta X_i,\sigma_u^2)$$

ويكون احتمال حدوث الملاحظة الأولى (Y_1) مثلا كما يلي:

$$\Pr(Y_1)=(2\pi\sigma_u^2)^{(-1/2)}\exp\left[(1/2\sigma_u^2)(Y_1-\alpha-\beta X_1)^2\right]$$

أما احتمال حدوث الملاحظة (Y_2):

$$\Pr(Y_2)=(2\pi\sigma_u^2)^{(-1/2)}\exp\left[(1/2\sigma_u^2)(Y_2-\alpha-\beta X_2)^2\right]$$

إن يكون احتمال حدوث كل الملاحظات (n) هو:

$$\Pr(Y_1,Y_2,..Y_n/\alpha,\beta,\sigma_u^2)=\left\{\left[(2\pi\sigma_u^2)^{(-1/2)}\exp\left[(1/2\sigma_u^2)(Y_1-\alpha-\beta X_1)^2\right]\right]\times.....\right.$$
$$\left.\times\left[(2\pi\sigma_u^2)^{(-1/2)}\exp\left[(1/2\sigma_u^2)(Y_i-\alpha-\beta X_i)^2\right]\right]\times.....\times\left[(2\pi\sigma_u^2)^{(-1/2)}\exp\left[(1/2\sigma_u^2)(Y_2-\alpha-\beta X_2)^2\right]\right]\right\}$$

إذن يصبح احتمال كل الملاحظات كما يلي:

$$\Pr(Y_1,Y_2,..Y_n/\alpha,\beta,\sigma_u^2)=L(Y_1,Y_2,..Y_n/\alpha,\beta,\sigma_u^2)=L(\alpha,\beta,\sigma_u^2)$$
$$=\left[(2\pi\sigma_u^2)^{(-n/2)}\exp\left[(1/2\sigma_u^2)\Sigma(Y_i-\alpha-\beta X_i)^2\right]\right] \quad .....(2،28)$$

وإذا أدخلنا اللوغاريتم الطبيعي على المعادلة (2.28) تصبح:

$$\log(L)=(-n/2)\log(2\pi)-(n/2)\log(\sigma_u^2)-(1/2\sigma_u^2)\Sigma(Y_i-\alpha-\beta X_i)^2 \quad .....(2.29)$$

نقوم بإشتقاق المعادلة (2.29) بالنسبة ل $(\alpha,\beta,\sigma_u^2)$ لتعظيمها. ومادامت كل القيم مسبوقة بإشارة سالبة فإن تعظيم الدالة عندما تكون موجبة معناه تصغيرها لما تكون سالبة. وهذا ما يتطابق مع قانون المربعات الصغرى التي تقوم بتصغير مجموع مربعات البواقي.

$$(\partial\log L/\partial\tilde{\alpha})=-(1/2\sigma_u^2)(2n\tilde{\alpha}-2\Sigma Y_i+2\tilde{\beta}\Sigma X_i)=0 \quad ..... \quad (2.30)$$
$$(\partial\log L/\partial\tilde{\beta})=-(1/2\sigma_u^2)(2\tilde{\beta}\Sigma X_i^2-2\Sigma X_iY_i+2\tilde{\alpha}\Sigma X_i)=0 \quad ..... \quad (2.31)$$
$$(\partial\log L/\partial\sigma_u^2)=-(n/2\sigma_u^2)(1/2\sigma_u^2)\Sigma(Y_i-\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}X_i)^2=0 \quad ..... \quad (2.32)$$

- نجري بعض التعديلات على المعادلتين (2.30)، (2.31) لنحصل على:

$$\Sigma Y_i=n\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}\Sigma X_i$$
$$\Sigma X_iY_i=\tilde{\alpha}\Sigma X_i+\tilde{\beta}\Sigma X_i^2$$

إن $(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})$ هما مقدرتي المعقولية العظمى. وتتطابقان مع مقدرتي المربعات الصغرى العادية $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ حيث أنه من هاتين المعادلتين نجد:

$$\tilde{\alpha}=\overline{Y}-\tilde{\beta}\overline{X}$$
$$\tilde{\beta}=(\Sigma X_iY_i-\overline{Y}\Sigma X_i)/(\Sigma X_i^2-\overline{X}\Sigma X_i)$$
$$\tilde{\sigma}_u^2=(1/n)\Sigma(Y_i-\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}X_i)^2 \quad ..... \quad (2.34)$$ ومن المعادلة (2.32) نجد:

وهو مقدر المعقولية العظمى ل (σ_u^2) ومنه نستنتج أن $(\tilde{\sigma}_u^2)$ تختلف عن $(\hat{\sigma}_u^2)$ حيث أن الأولى متحيزة بينما الثانية غير متحيزة.

9. الإختبارات الإحصائية حول معنوية المعالم: إختبارات الدرجة الأولى.

بمعرفة توزيع $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ يمكن تكوين مجالات ثقة، وإجراء إختبار الفرضيات الموضوعية حول إنحدار المعالم (α,β) تقترح مجالات الثقة (أو مجال المقدرات) مجالا للقيم التي يمكن أن تحتوي على معالم الإنحدار الحقيقية. مع كل مجال ثقة نضع مستوى إحصائي للمعنوية. فبوجود مستوى المعنوية، تشكل مجالات الثقة بحيث أن إحتمال إحتواء المجال على معلمة الإنحدار الحقيقية يكون واحدا (1) ناقص مستوى المعنوية أي $(1-\lambda)$ ، تستعمل مجالات الثقة على الخصوص لإختبار الفرضيات الإحصائية حول معالم الإنحدار المقدرة. والإختبار الشائع جدا هو فرضية العدم H0. على العموم، تقترح فرضية العدم بأنه لا يوجد أثر في النموذج من قبل متغير ما ونظرا إلى أن الباحثين يتمنون قبول النموذج، فإن فرضية العدم H0 ، توضح عادة لإثبات رفضها إذا أمكن ذلك. فمثلا، نأخذ دالة الإستهلاك (Y) المشروحة بدالة الدخل (X). وننتظر من الإستهلاك والدخل أن يكونا مرتبطين إيجابيا. وبالتالي يكون (β) موجبا. ومع هذا، فلإختبار صحة النموذج نضع $(H_0 : \beta = 0)$ ونأمل رفض (H_0) بإيجاد القيمة التقديرية $(\hat{\beta})$ والتي تكون أكبر من الصفر، حتى نقبل النموذج

إن أحد أهدافنا الأولية في الإقتصاد القياسي هو تحليل البيانات (المعطيات). إن المقارنة الآنية لعدة نماذج تعتبر صحيحة عادة، تختبر النماذج بالتسلسل، للوصول إلى تقييم كل نموذج مثلما قدم للدراسة. هذا يعني أن كل نموذج يجب أن يخصص في الشكل الذي (يوافقه) يقبل إختبار الفرضيات ميدانيا. فإذا كانت البيانات غير متسقة مع النموذج، يكون هذا النموذج مرفوضا ونقبل النموذج البديل إلى أن نحصل على فرضيات جديدة قابلة للإختبار أو على بيانات جديدة. ولهذا فإن إختبار الفرضيات تناسب نموذج واحد وتكون نتائجها قبول النموذج أو رفضه.[1]

إن إختيار مستوى المعنوية يكون عشوائيا ويعتمد عمليا على نوع الخاتمة (النهاية) التي نريد الوصول إليها من النموذج. إن مستوى المعنوية الضرورية لقبول نموذج ما يعتبر واقعيا فيما بين الباحثين وكذلك بين أنواع النماذج المدروسة. فمثلا، إن النموذج المقدر بعدد كبير من الملاحظات يمكن أن يسمح لنا برفض فرضيات العدم لعدة معالم تمثل المتغيرات المستقلة. ولهذا، يمكن أن نختار مستوى معنوية منخفض حتى نجعل رفض فرضية العدم أكثر صعوبة.

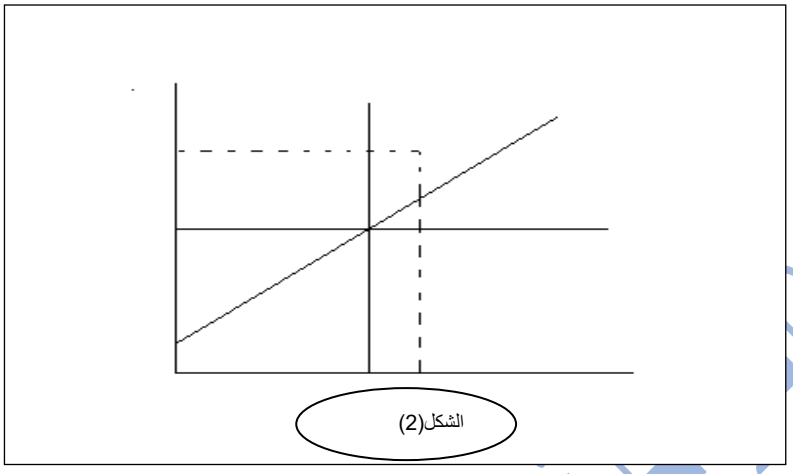
- إن الإختبار الإحصائي لرفض فرضية العدم هو عادة يعتمد على التوزيع (t) . فالتوزيع (t) مناسب لأنه في الإختبار الإحصائي نحتاج إلى إستعمال مقدر عينة تباين الخطأ عوضا عن القيمة الحقيقية للمعلمة. وقبل ذلك، نبدأ ببعض التعريفات الهامة في تحليلنا.

أ.إختباروجود التوفيق بواسطة (r^2) (قياس جودة التوفيق)

في معادلة خط الإنحدار، تساعد البواقي على قياس مدى تمثيل (توفيق) المعادلة المعروضة (في النموذج) لمشاهدات العينة. حيث أن القيمة الكبيرة للبواقي تعني بأن التمثيل يكون غير جيد، والقيمة

[1] [1] صالح تومي، مدخل لنظرية القياس الاقتصادي مرجع سبق ذكره ص 80

الصـــغيرة للبواقي تعني تمثيل (توفيق) جيد للنموذج. إن المشـــكل في إســـتعمال البواقي كمقياس لقياس جودة التوفيق هو أن قيمة البواقي تعتمد على المتغير (Y). ولهذا نقوم بتعريف تغير (Y) حول وســـطها كما يلي في الشكل (2)



عن الشكل (2) لدينا.

$$Y_i - \overline{Y} = PS = PR + RS$$

$$(Y_i - \overline{Y}) = (\hat{Y}_i - \overline{Y}) + e_i = (\hat{Y}_i - \overline{Y}) + (Y_i - \hat{Y}_i)$$

وبتربيع كل الأطراف نجد: .....

$$(Y_i - \overline{Y})^2{}_i = (\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 + (Y_i - \hat{Y}_i)^2 + 2(\hat{Y}_i - \overline{Y})(Y_i - \hat{Y}_i)$$

- وبجمع الطرفين بالنسبة لكل (i) نجد:

$$\Sigma(Y_i - \overline{Y})^2{}_i = \Sigma(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 + \Sigma(Y_i - \hat{Y}_i)^2 + 2\Sigma(\hat{Y}_i - \overline{Y})(Y_i - \hat{Y}_i)$$

وبتطبيق خاصية المربعات الصغرى العادية نجد:

$$\Sigma(\hat{Y}_i - \overline{Y})(Y_i - \hat{Y}_i) + \Sigma(\hat{Y}_i - \overline{Y})e_i = 0$$

ويصبح لدينا المقدار التالي:

$$\underbrace{\Sigma(Y_i - \overline{Y})^2}_{TSS} = \underbrace{\Sigma(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2}_{RSS} + \underbrace{\Sigma(Y_i - \hat{Y}_i)^2}_{ESS}$$

حيث (TSS) هي الانحرافات الكلية و (RSS) هي الانحرافات المفسرة و (ESS) هي الانحرافات غير المفسرة

وبتقسيم كل الأطراف على الإنحرافات الكلية (TSS) نجد:

$$1 = \frac{RSS}{TSS} + \frac{ESS}{TSS}$$

ومنه نعرف (R^2) معامل التحديد كما يلي:

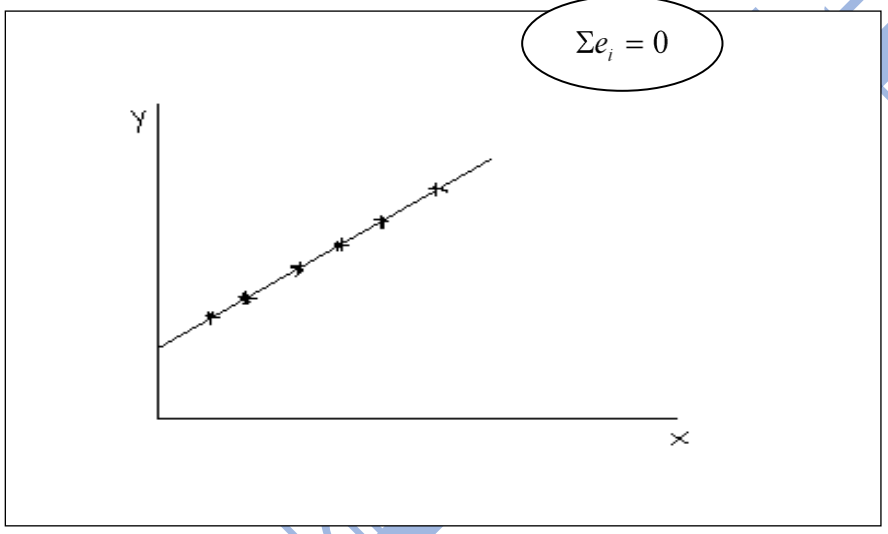
$$R^2 = r^2 = \frac{RSS}{TSS} \Rightarrow \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{ESS}{TSS}$$

إن (R^2) هو نسبة الإنحرافات الكلية في y مشروحة (موضحة) بواسطة إنحدار (Y) في (X). مادام مجموع مربعات الأخطاء (ESS) توجد مابين الصفر ومجموع الإنحرافات الكلية (TSS)، فإن (R^2) تكون موجودة مابين الصفر والواحد أي: $0 \le R^2 \ge 1$

عندما ينعدم أثر المتغير المستقل (X_i) في المتغير التابع (Y_i) ، يكون $(R^2 = 0)$ ويظهر ذلك عندما تكون قيم (Y_i) موجودة على طول خط واحد أي $(Y_i = \overline{Y})$ وعندما تقع كل النقاط (Y_i) على المستقيم $(\hat{Y}_i)$ (معادلة الانحدار) أي $(e_i = 0)$ ، يكون (R^2) قد أخذ أكبر قيمة له $(R^2 = 1)$ ويعني ذلك أحسن توفيق ممكن أي Perfect fit كما يلي:

$$Y_i = \hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i$$

$$\Sigma e_i = 0$$



ولإظهار علاقة (R^2) بالمعالم المقدرة نكتب.

$$R^2 = \frac{(\Sigma x_i y_i)^2}{(\Sigma x_i^2)(\Sigma y_i^2)} = \frac{\Sigma x_i y_i}{\Sigma x_i^2} \times \frac{\Sigma x_i y_i}{\Sigma y_i^2} = \hat{\beta}\frac{\Sigma x_i y_i}{\Sigma y_i^2} = \hat{\beta}^2 \frac{\Sigma x_i^2}{\Sigma y_i^2} = 1 - \frac{\Sigma e_i^2}{\Sigma y_i^2}$$

ويمكن حساب معامل التجديد من الفصل الثاني المثال (1.1):

$$\left.\begin{array}{l} \hat{Y}_i = 33{,}75 - 3{,}25X_i \\ \Sigma e_i^2 = 383{,}98 \\ \Sigma y_i^2 = 894 \end{array}\right\} R^2_{XY} = 1 - \frac{\Sigma e_i^2}{\Sigma y_i^2} = 0{,}570$$

ب. توزيع مقدرات المربعات الصغرى وأخطائها المعيارية:[1]

حصلنا على عبارة للوسط الحسابي وتباين مقدرات المربعات الصغرى. وإذا إستعملنا الفرضية (d) فإن المقدرات تكون لها توزيع طبيعي كما يلي:

$$\hat{\alpha} \to N\left(\alpha, \sigma_u^2 \Sigma X_i^2 / n\Sigma x_i^2\right)$$
$$\hat{\beta} \to N\left(\beta, \sigma_u^2 \Sigma x_i^2\right)$$

- حيث إذا كان لدينا متغير ما (X) على الشكل:.

[1] طارق محمد الرشيد، المرشد في لاقتصاد القياسي التطبيقي، الخرطوم، جي تاون، الطبعة الاولى، 2005، ص 64

$E(X)=\mu, \text{var}(X)=\sigma_X^2$.

وكانت (X) تتبع التوزيع الطبيعي فإن توزيعه يكون:.

$X \to N(\mu, \sigma_X^2)$.

ونعرف أن مقدر تباين الأخطاء هو: [1]

$$\hat{\sigma}_u^2 = \Sigma e_i^2/(n-2) = \Sigma(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i)^2/(n-2)$$
$$= \left[\Sigma(Y_i - \overline{Y})^2 - \hat{\beta}\Sigma(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})\right]/(n-2)$$

ومادام $(\hat{\sigma}_u^2)$ هو مقدر (σ_u^2) غير المتحيز حيث أن $E(\hat{\sigma}_u^2)=\sigma_u^2$

- إذن، إذا كانت $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ متغيرات مستقلة وكذلك:.

$X \to N(\mu, \sigma_X^2)$

فإن:

$Y_i = \Sigma a_i X_i \to N(\Sigma a_i \mu_i, \Sigma a_i^2 \sigma_i^2)$

ولما يكون $\hat{\beta} = \Sigma w_i Y_i$ فإن:

$\hat{\beta} \to N(\beta, \sigma_u^2 \Sigma x_i^2)$

وتكون كذلك

$\hat{\alpha} \to N(\alpha, \sigma_u^2 \Sigma X_i^2/n\Sigma x_i^2)$

لتقدير $\text{var}(\hat{\alpha}), \text{var}(\hat{\beta})$. نعوض (σ_u^2) ب $(\hat{\sigma}_u^2)$ ونكتب مقدرات التباين على الشكل $\hat{\text{var}}(\hat{\alpha}), \hat{\text{var}}(\hat{\beta})$ حيث أن:

$\hat{\text{var}}\,\hat{\beta} = (\sigma_u^2 \Sigma x_i^2)$ $\hat{\text{var}}\,\hat{\alpha} = (\sigma_u^2 \Sigma X_i^2/n\Sigma x_i^2)$ و

ومنه فإن الأخطاء المعيارية (Standard errurs) $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ هي مقدرات الانحرافات المعيارية أو الجذور التربيعية لمقدرات التباينات وتعرف كما يلي:

$$SE(\hat{\alpha}) = \sqrt{\hat{\text{var}}(\hat{\alpha})} = \hat{\sigma}_u^2 \sqrt{\Sigma X_i^2/n\Sigma x_i^2} = \sqrt{\Sigma e_i^2 \Sigma X_i^2/(n-2)n\Sigma x_i^2}$$
$$SE(\hat{\beta}) = \sqrt{\hat{\text{var}}(\hat{\beta})} = \hat{\sigma}_u^2 \sqrt{1/\Sigma x_i^2} = \sqrt{\Sigma e_i^2/(n-2)\Sigma x_i^2}$$

ثم نقارن هذه الإنحرافات المعيارية مع القيم العددية للمقدرات $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ فإذا كانت الانحرافات المعيارية أقل من نصف القيمة العددية لمقدرات المعالم $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ أي $[SE(\hat{\alpha}) \prec \hat{\alpha}/2]$ نستنتج بأن تلك المقدرة مقبولة إحصائيا. وهذا معناه رفض الفرضية القائلة بأن $(\alpha = 0)$ (أو $(\beta = 0)$). أما إذا كانت قيمة الإنحرافات المعيارية أكبر من نصف قيمة مقدرة المعلمة، فنقول أن مقدرات المربعات الصغرى غير جيدة إحصائيا.

وكمثال على ذلك نأخذ دالة العرض من الفصل الأول لنقدر الإنحرافات المعيارية:

$$SE(\hat{\alpha}) = \sqrt{\hat{\text{var}}(\hat{\alpha})} = \hat{\sigma}_u^2 \sqrt{\Sigma X_i^2/n\Sigma x_i^2} = \sqrt{38{,}4(1020)/(12)(48)} \approx 8{,}3$$
$$SE(\hat{\beta}) = \sqrt{\hat{\text{var}}(\hat{\beta})} = \hat{\sigma}_u^2 \sqrt{1/\Sigma x_i^2} = \sqrt{(38{,}4)/(48)} \approx 0{,}9$$

وتكتب معادلة خط الإنحدار المقدر (لدالة العرض)

$\hat{Y}_i = 33{,}75 + 3{,}25X_i$ (0,9) (8,3)

[1] عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، الإحصاء للعلوم الإدارية والتطبيقية (عمان) دار الشروق للنشر والتوزيع1997، ص 54

حيث أن القيم مابين قوسين هي الإنحرافات المعيارية. ونلاحظ

$[SE(\hat{\alpha}) \prec \hat{\alpha}/2]\,[SE(\hat{\beta}) \prec \hat{\beta}/2]$.....

ومنه نستنتج أن (α,β) كلاهما يختلف عن الصفر.

ت. إختبار التوزيع T :

في تطبيقات الإقتصاد القياسي، تكون التباينات الحقيقية للمقدرات $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ غير معروفة لأنها تحتوي على تباين الأخطاء (σ_u^2) والذي بدوره يكون غير معروف. ولهذا نستعمل المقدر غير المتحيز $(\hat{\sigma}_u^2)$ للحصول على مقدرات تباينات المعالم المقدرة $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ إذا كان حجم العينة كبير (n >30) فبإمكاننا تطبيق التحويل z . أما إذا كانت (n< 3) وكانت معالم المجمع تخضع للتوزيع الطبيعي . يمكن التحويل المعتمد على التوزيع t ، وذلك باعتمادنا على درجات الحرية ومقدرات التباينات $\hat{\text{var}}(\hat{\alpha})$ ، $\hat{\text{var}}(\hat{\beta})$ عوض التباينات الحقيقية.

وللوصول إلى التوزيع (t)، تبين فرضية التوزيع (t) ، بأنه إذا كانت:

- ✓ $(\hat{\theta})$ هي مقدرة ما لها وسط حسابي $E(\hat{\theta})=\theta$ وتباين $\text{var}(\hat{\theta})=\sigma_\theta^2$ فإن $\hat{\theta} \to N(\theta,\sigma_\theta^2)$
- ✓ bوإذا كان $(\hat{\sigma}_\theta^2)$ هو مقدر (σ_θ^2) غير المتحيز
- ✓ وكانت $(\hat{\sigma}_\theta^2)$ مستقلة عن (σ_θ^2)

فإنه يمكن صياغة العبارة:

$$Q = V\hat{\sigma}_\theta^2/\sigma_\theta^2 \to \chi_v^2$$

حيث أن (v) هي عدد درجات الحرية وتكتب كذلك:

$$(\hat{\theta}-\theta) \to N(0,\sigma_\theta^2)$$

ومنه تكتب قانون التوزيع (Z) ، حيث أن (Z) تقيس التوزيع الطبيعي على الشكل :

$$Z = (\hat{\theta}-\theta)/\sigma_\theta \to N(0,1)$$

ومن ثم نكتب قانون التوزيع (t):

$$T = Z\sqrt{V}/Q$$

وبالتعويض نجد :

$$\frac{(\sqrt{V}(\hat{\theta}-\theta))/\sigma_\theta}{\sqrt{V}\hat{\sigma}_\theta/\sigma_\theta} \to T_v$$

$$\Rightarrow (\hat{\theta}-\theta)/\hat{\sigma}_\theta \to T_v$$

حيث أن $\sigma_\theta = SE\,\text{var}(\theta)$

وعندما نطبق هذه القوانين على مقدرات (α,β) ينتج :

$$\left.\begin{array}{ll} & Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \\ \text{var}(\hat{\alpha}) = \sigma_u^2 \Sigma X_i^2/n\Sigma x_i^2 & u_i \to N(0,\sigma_u^2) \\ \text{var}(\hat{\beta}) = \sigma_u^2/\Sigma x_i^2 & \hat{\alpha} \to N(\alpha,\text{var}(\hat{\alpha})) \\ \hat{\sigma}_u^2 = \Sigma e_i^2/(n-2) & \hat{\beta} \to N(\beta,\text{var}(\hat{\beta})) \end{array}\right\}$$

كما أن $(\hat{\sigma}_\theta^2)$ هي المقدرة ل (σ_θ^2) والمستقلة عن $(\sigma_u^2,\hat{\alpha},\hat{\beta})$ والموزعة استقلاليا عن (σ_θ^2) إذا تصبح :

$$(n-2)\hat{\sigma}_u^2/\sigma_u^2 \rightarrow \chi^2_{(n-2)}$$

وبالتالي نجد :

$$\frac{\hat{\alpha}-\alpha}{SE(\hat{\alpha})} = \frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\sqrt{\hat{\text{var}}(\hat{\alpha})}} = \frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\hat{\sigma}_u\sqrt{\sum X_i^2/n\sum x_i^2}} \rightarrow T_{(n-2)}$$

$$\frac{\hat{\beta}-\beta}{SE(\hat{\beta})} = \frac{\hat{\beta}-\beta}{\sqrt{\hat{\text{var}}(\hat{\beta})}} = \frac{\hat{\beta}-\beta}{\hat{\sigma}_u\sqrt{1/\sum x_i^2}} \rightarrow T_{(n-2)}$$

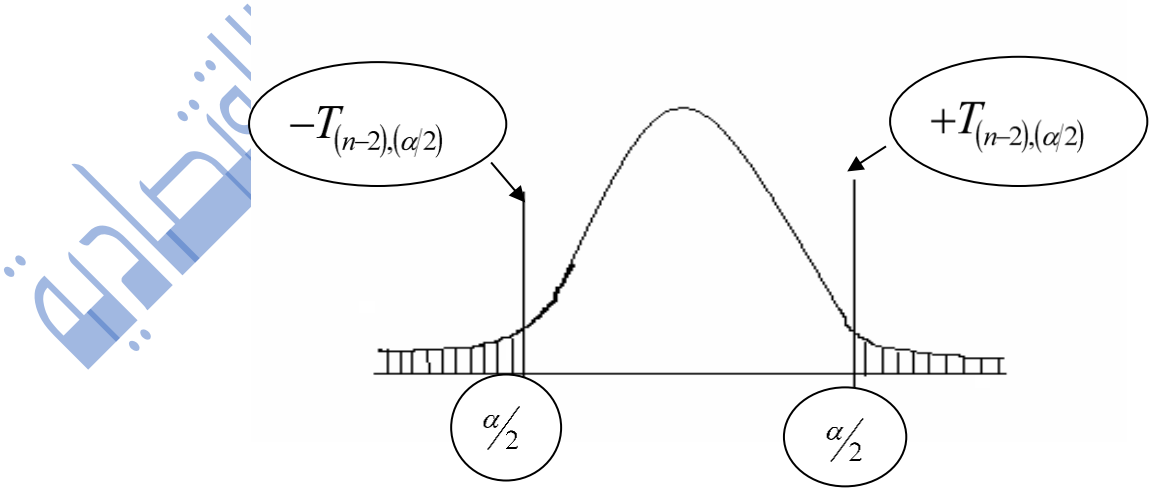
ث. مجال الثقة لمعالم الانحدار:

إن رفض فرضية العدم ليس معناه أن المقدرة $\hat{\beta}$ او $\hat{\alpha}$ هي المقدرة الحقيقية لمعلمة المجتمع β او α . وإنما تعني بان مقدرتنا حصلنا عليها من عينة مسحوبة من المجتمع الذي تكون معلمته تختلف عن الصفر. ولهذا نستعين بمجالات الثقة، ولتكوين مجال الثقة من التوزيع (T) بالنسبة للمعلمة (α) مثلا نكتب القانون الخاص بهذه المعلمة : $T_{(n-2)} = (\hat{\alpha}-\alpha)/SE(\hat{\alpha})$

وعند مستوى معنوية 5% يكون مجال الثقة هو $(1-\lambda)$% أي 95 % ونجد من جدول التوزيع (T)القيمة $(\pm T_{(0,025)})$ بدرجات حرية $(n-2)$ وهذا معناه أن احتمال وجود (T) مابين $(+T_{(0,025)})$ و $(-T_{(0,025)})$ هو (0,95) مع $(n-2)$.

$$\Pr\{-T_{\alpha/2} < T < +T_{\alpha/2}\} = \lambda : \alpha = 1-\lambda$$

$$\Pr\left\{-T_{0,025} < \frac{\hat{\alpha}-\alpha}{SE(\hat{\alpha})} < +T_{0,025}\right\} = 0,95$$



وإذا ضربنا (داخل الاحتمال) كل الأطراف بواسطة $SE(\hat{\alpha})$ نجد:[1]

$$\left(-SE(\hat{\alpha})T_{(n-2),\alpha/2} \le \hat{\alpha}-\alpha \le +SE(\hat{\alpha})T_{(n-2),\alpha/2}\right)$$

ونحول $(\hat{\alpha})$ إلى طرفي المتراجعة بواسطة الضرب ب (-1) لنحصل على:

[1] عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، الإحصاء للعلوم الإدارية والتطبيقية مرجع سبق ذكره ص90

$$\left(\hat{\alpha}+SE(\hat{\alpha})T_{(n-2),\alpha/2}\geq\alpha\geq\hat{\alpha}-SE(\hat{\alpha})T_{(n-2),\alpha/2}\right)$$

أي أن $(1-\lambda)$% مجال ثقة ل (α) يأتي من:

$$\Pr\left(\hat{\alpha}-SE(\hat{\alpha})T_{(n-2),\alpha/2}\leq\alpha\leq\hat{\alpha}+SE(\hat{\alpha})T_{(n-2),\alpha/2}\right)=\lambda$$

ويكون مجال الثقة ل (α) هو:

$$CI(\alpha)=\alpha=\hat{\alpha}\pm SE(\hat{\alpha})T_{(n-2),\alpha/2}$$

كلما كان مجال الثقة ضيقا كلما المقدر أحسن لأن الأخطاء المعيارية (SE) تكون أصغر. لكن تذكر بأن هذا يعتمد على نوعية $\hat{\text{var}}(\hat{\alpha})$ كمقدر ل $\text{var}(\hat{\alpha})$

حيث أن $E[\hat{\text{var}}(\hat{\alpha})]<\text{var}(\hat{\alpha})$

ج. إختبار المعنوية لمعامل الإرتباط العينة:

- إن معامل الارتباط الخطي المذكور في الصفحة (35) هو مقدر لمعالم الارتباط الحقيقي ما بين المتغير X و Y

. فإذا كان معامل ارتباط المجمع $(p=0)$ يكون توزيع العينة (v) متناظرا كما يلي: $v\rightarrow N\left(0,\sqrt{(1-v^2)/n-2}\right)$

وبتطبيق قانون التوزيع (T) نجد: $T_{(n-2)}=v/\sqrt{(1-v^2)/(n-2)}=v\sqrt{(n-2)}/\sqrt{1-v^2}$

ثم نقارن $(T_{(n-2)})$ مع القيمة الجد ولية $(T_{(n-2),\alpha/2})$

ح. إختبار الفروض (تعميم)

قد يكون النموذج المبني من طرفنا (المفروض) صحيحا أو غير صحيح. وتثبت صحته من خلال اختباره. ويتم ذلك بواسطة فرض معلمة من معالم النموذج تساوي الصفر وتسمى فرضية العدم. وما دام العلاقة بين X و Y قائمة على الأساس الخطي $Y_i=\alpha+\beta X_i+U_i$ فإن انعدامها يعني بأن خط انحدار المجمع عبارة عن خط أفقي أي $\text{Ho}:\beta=0$.

وبما أن الافتراض (Ho) خاضع للاختبار فإنه لا يكون بالضرورة صحيحا، الأمر الذي يتطلب وضع افتراض بديل Ha أي : $\text{Ha}:\beta\neq0$. و في حالة معرفة إشارة (β) مسبقا فإن (Ha) تنص على:(أو: $\beta<0$: Ha) $\text{Ha}:\beta>0$. أما إذا كنا لا نعرف إشارة (β) فإنه يكون: $\text{Ho}:\beta=0\ \text{vs}:\text{Ha}:\beta\neq0$

إذن إذا طلب منا اختبار الفرضية $\text{Ho}:\beta=0\ \text{vs}:\text{Ha}:\beta\neq0$

نكتب: $T_{(n-2)}=\dfrac{\hat{\beta}-\beta}{SE(\hat{\beta})}$ .....

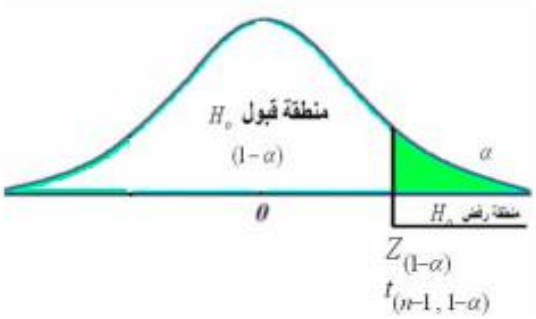
ولكن ما دمنا نختبر مدى صحة($\beta=0$) يصبح لدينا: $T_{(n-2)}=\hat{\beta}/SE(\hat{\beta})$.أما الحدود الفاصلة لقبول أو رفض فرضية العدم. فإنها تحدد بواسطة جداول توزيع(T) . ولكل مستوى من مستويات المعنوية، وبموجب المتباينة التالية: $\left(T_{(n-2),\alpha/2}\leq\left(\hat{\beta}/SE(\hat{\beta})\right)\leq T_{(n-2),\alpha/2}\right)$

في حالة معرفة إشارة β مسبقا، تصاغ المتباينة على الوجه التالي: $\left(\left(\hat{\beta}/SE(\hat{\beta})\right)\leq T_{(n-2),\alpha/2}\right)$

أو على الوجه التالي: $\left(T_{(n-2),\alpha/2}\leq\left(\hat{\beta}/SE(\hat{\beta})\right)\right)$

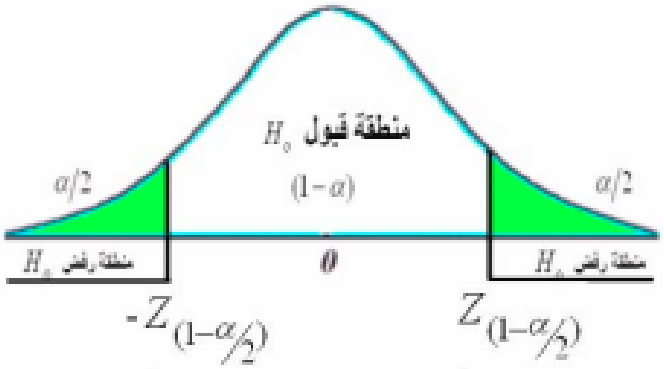
ويطلق على المجال الذي تقبل ضمنه فرضية العدم (Ho) باسم منطقة القبول وعلى المجال الذي نرفض فيه باسم منطقة الرفض. كما يلي:

أ. في حالة معرفة الإشارة مسبقا



ب. في حالة عدم معرفة الإشارة مسبقا:

إذا وقعت نتيجة الاختبار خارج مجال الثقة نرفض فرضية العدم (Ho) ويؤخذ بالفرض البديل (Ha)



وإذا وقعت داخله تقبل (Ho) أي :

$$\Pr\left(T_{(n-2)} < T_{(n-2),\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

نقارن بين النتيجة المحسوبة $(T_{(n-2)})$ والنتيجة المأخوذة من الجدول $(T_{(n-2),\alpha/2})$ فإذا كانت $(T_{(n-2),\alpha/2}) > (T_{(n-2)})$ نقبل(Ho) والعكس بالعكس.

وتوجد عدة تساؤلات لدى باحثي الاقتصاد القياسي في الاختبار الإحصائي الأفضل ما بين معامل الارتباط (r)والأخطاء المعيارية للمقدرات $SE(\bullet)$ فأيهما أحسن؟ قيمة عالية ل(r) أم قيمة منخفضة للأخطاء المعيارية للمقدرات؟ على العموم، يكون الاختيار سهلا لما نحصل على قيمة عالية ل(r) وقيمة منخفضة لمقدرات الأخطاء المعيارية. لكن في الحياة العملية لبحوث الاقتصاد القياسي نادرا ما يحدث ذلك. حيث في أغلب الأحيان نحصل على قيمة عالية ل(r) وفي نفس الوقت على قيم عالية في الأخطاء المعيارية لبعض المقدرات. وفي هذه الحالة، فإن بعض منظري الاقتصاد القياسي يعطون أهمية أكثر لقيمة(r) العالية، ومن ثم يقبلون مقدرات المعالم غير مبالين (مهتمين) بعدم جدية المعنوية الإحصائية لبعض هذه المعالم.

ويتفق أغلب الكتاب في الاقتصاد القياسي بأنه تعطى أهمية أكبر ل (r)كما يكون الهدف من النموذج المبنى هو استعماله في التنبؤ المستقبلي، بينما تعطى أهمية أكبر للأخطاء المعيارية لما يكون هدف للبحث هو التحليل وشرح الظاهرة الاقتصادية، ويفضل الحصول على قيمة عالية ل(r) وقيمة منخفضة للأخطاء المعيارية حتى يكون شرحنا أقرب إلى الواقع، حيث لما يحدث تعارض في هذين المبدأين الأساسيين يجب على

الباحث أن يكون حرا في تفسيره للانحدار وقبوله لنتائج التقدير. وفي هذه الحالة تعطى الأولوية للمقاييس والأسس الاقتصادية المعروفة مسبقا مثل حجم وإشارة المقدرات. لأنه بدون قبول هذه الأخيرة لا يمكن الانتقال إلى اختيارات الدرجة الأولى.

10. التنبؤ:

إن أحد الأدوار الرئيسية للاقتصاد القياسي هو التنبؤ بتأثر أحد المتغيرات من طرف المتغيرات الأخرى. فمثلا، نفرض أننا نريد اختبار أثر تخفيض الضريبة على مستوى إنفاق المستهلك. فإن عرفنا بأي مقدار يمكن للضريبة البديلة أن تزيد من الدخل المتاح، نستطيع استعمال دالة الاستهلاك المقدرة للتنبؤ بآثار الضريبة المخفضة على الاستهلاك. نموذجا بسيطا: $Y_i = \alpha + \beta X_i + U_i$ لنفرض أننا نعرف قيمة (X) في دورة التنبؤ ونرمز لها بالرمز (X_g). و إذا فرضنا أن البناء الهيكلي للمعادلة لا يتغير، فإن قيمة (Y) في هذه الفترة تكون (Y_g) كما يلي:[1]

$$Y_g = \alpha + \beta X_g + U_g$$

عندما نستعمل علاقة ما للتنبؤ (Y_g) ، هناك مصدران لعدم الوضوح (الدقة) في تنبؤاتنا:

أ. أولا لا نعرف $(\alpha \text{ و } \beta)$ ولهذا يجب أن نستعمل مقدراتنا $(\hat{\alpha} \text{ و } \hat{\beta})$ لكي نقدر القيمة (Y_g) إن هذه القيمة هي وسط (Y) الموافق ل (Y_g) أي:

$$E(Y_g / X_g) = \alpha + \beta X_g \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.33)$$

ب. بالإضافة إلى أن (u_g) متغير عشوائي غير مشاهد. وهذا حتى إذا عرفنا $(\alpha \text{ و } \beta)$ وبالتالي استطعنا حساب $E(Y_g / X_g)$ ، نبقى غير قادرين على التنبؤ بقيمة (Y_g) نفسها، ثم نضع مجالا للتنبؤ ب (Y_g) وما دام

$$E(Y_g / X_g) = \alpha + \beta X_g$$

ويكون المقدر الطبيعي لها على الشكل:

$$\hat{Y}_g = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_g$$

ويمكن أن نبين بأن هذا المقدر هو مقدر غير متحيز ل $E(Y_g / X_g)$ وأنه عبر المتغيرات الخطية غير المتحيزة يعتبر هذا المقدر أحسنها (أي له أصغر تباين). ويعرف باسم: أفضل تنبؤ خطي غير متحيز (Blup) وتأتي هذه الخاصية من كون $(\hat{\alpha} \text{ و } \hat{\beta})$ لها خاصية blue ، فإذا فرضنا أن (X) مستقلة، يكون تباين $(\hat{Y}_g)$ على الشكل:

$$\text{var}(\hat{Y}_g) = \text{var}(\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_g) = \text{var}(\hat{\alpha}) + X_g^2 \text{var}(\hat{\beta}) + 2X_g \text{cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$$

ولدينا: $\text{var}(\hat{\alpha}) = \sigma_u^2 \Sigma X_i^2 / n \Sigma x_i^2 , \text{var}(\hat{\beta}) = \sigma_u^2 / \Sigma x_i^2 , \text{cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = -\bar{X} \sigma_u^2 / \Sigma x_i^2$ .....

إذن تصبح: $\text{var}(\hat{Y}_g) = (\sigma_u^2 / \Sigma x_i^2)[(\Sigma X_i^2 / n) + X_g^2 - 2\bar{X} X_g]$ .....

وبمعرفة: $\Sigma X_i^2 = \Sigma x_i^2 + n\bar{X}^2$ .....

[1] عبد القادر محمد عطية الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق، ط (2)، الإسكندرية الدار الجامعية، 2000 ص 9

تصبح: $\text{var}(\hat{Y}_g) = (\sigma_u^2 / \sum x_i^2)\left[(\sum x_i^2 / n) + (X_g - \bar{X})^2\right]$ .....

$$\text{var}(\hat{Y}_g) = \sigma_u^2\left[(1/n) + (X_g - \bar{X})^2 / \sum x_i^2\right] \quad \text{..... (2.34)}$$

ونلاحظ أن تباين مقدر التنبؤ $\text{var}(\hat{Y}_g)$ ينخفض كلما:

أ. انخفضت $(X_g - \bar{X})^2$ أي كلما اقتربت (X_g) من وسط العينة $(\bar{X})$.

ب. ازدادت (n) .أي حجم العينة يزداد.

ت. ازدادت القيمة $\sum x_i^2$

لنأخذ الآن المقدر ل $E(Y_g / X_g)$ كقيمة متنبأ بها ل (Y_g). إذ أن هذا الإجراء طبيعي ما دام $E(u_i) = 0$ ، فنتنبأ بمستوى (Y_g) وذلك بواسطة تقدير وسطها. إن الخطأ الداخل في هذا التنبؤ معطى بالعبارة $\left[\hat{u}_g = e_g = Y_g - \hat{Y}_g\right]$ ونسميه خطأ التنبؤ ثم نلاحظ أن :

$$E(e_g) = E(Y_g) - E(\hat{Y}_g) = E(\alpha + \beta X_g + u_g) - E(\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_g)$$
$$= (\alpha + \beta X_g) - (\alpha + \beta X_g) = 0$$

ويصبح تباين خطأ التنبؤ:

$$\text{var}(e_g) = \text{var}(Y_g - \hat{Y}_g) = \text{var}(Y_g) + \text{var}(\hat{Y}_g) - 2\,\text{cov}(Y_g, \hat{Y}_g)$$

إن قيمة (Y_g) تعتمد مباشرة على قيمة (u_g) ، بينما تعتمد $(\hat{Y}_g)$ على $u_1, u_2, \ldots\ldots u_n$ بواسطة $(\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta})$ وبالتالي يكون: $\text{cov}(Y_g, \hat{Y}_g) = 0$ ومنه:

$$\text{var}(e_g) = \text{var}(Y_g) + \text{var}(\hat{Y}_g)$$

ونلاحظ أنه إذا كانت (X) مستقلة فإن $(u_f) = \ldots = (y_f)$ ... $\text{var}(Y_g) = \text{var}(u_g)$ كما وجدنا في الصفحة (36) ولدينا من قبل: $\text{var}(\hat{Y}_g)$ في المعادلة (2.34) لتصبح:

$$\text{var}(e_g) = \sigma_u^2 + \sigma_u^2\left[(1/n) + (X_g - \bar{X})^2 / \sum x_i^2\right]$$

$$\sigma_e^2 = \sigma_u^2 + \sigma_u^2\left[(1/n) + (X_g - \bar{X})^2 / \sum x_i^2\right] \quad \text{.....(2 . 35)}$$

ومنه فإن المقدر غير المتحيز لتباين خطأ التنبؤ $\hat{\text{var}}(e_g)$ هو:

$$\hat{\sigma}_e^2 = \hat{\sigma}_u^2\left[1 + (1/n) + (X_g - \bar{X})^2 / \sum x_i^2\right]$$

ونلاحظ أنه كلما كبر حجم العينة فإن $(\hat{\sigma}_e^2)$ تقترب من $(\hat{\sigma}_u^2)$ أي:

$$as(n) \to \infty \Rightarrow \hat{\sigma}_e^2 \to \hat{\sigma}_u^2 \quad \text{.....}$$

ولهذا فعندما يكون حجم العينة كبيرا يمكن استعمال $(\hat{\sigma}_u^2)$ كتقريب ل $(\hat{\sigma}_e^2)$ نأمل الآن في إيجاد مقياس لقياس دقة هذا التنبؤ ل (Y_g) وللقيام بذلك نفرض توزيعا احتماليا معين للاضطرابات العشوائية، وهي التوزيع الطبيعي. ثم ما دام (u_g) موزع طبيعيا وكذلك (Y_g) ، وما دام $u_1, u_2, \ldots\ldots u_n$ موزع طبيعيا وكذلك $(\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta})$ فإن $(\hat{Y}_g)$ تكون موزعة طبيعيا أيضا، ولهذا فإن خطأ التنبؤ $(e_g = Y_g - \hat{Y}_g)$ يكون متغيرا عشوائيا موزع توزيعا طبيعيا بوسط مساوي للصفر وبتباين مساوي ل $(\hat{\sigma}_e^2)$ ومنه فإن: $Z = e_g / \sigma_e \to N(0,1)$

كما أن $(\hat{\sigma}_e^2)$ تعتمد على القيمة غير المعرفة (σ_u^2) ، فعمليا نعوض بمقدرها $(\hat{\sigma}_e^2)$ لتعطي المتغير العشوائي للتوزيع (t) كما يلي: $e_g / \hat{\sigma}_e = \left((Y_g - \hat{Y}_g) / \hat{\sigma}_e\right) \to t_{(n-2)}$

إذا كانت $\left(t_{(n-2),(\alpha/2)}\right)$ هي القيمة الحرجة (من الجدول) للتوزيع (t) ب (n-2) درجات حرية بحيث أن:

$$Pr\left(t_{(n-2)}\langle t_{(n-2),(\alpha/2)}\right)=1-\alpha$$

فإن:

$$Pr\left(-t_{(n-2),(\alpha/2)}\langle\left(\left(Y_g-\hat{Y}_g\right)/\hat{\sigma}_e\right)\langle t_{(n-2),(\alpha/2)}\right)=0{,}95$$

ويكون % 95 مجال تنبؤ ل$\left(\mathrm{Y}_g\right)$ كما يلي:

$$C.I.\left(\mathrm{Y}_g\right)=\hat{\mathrm{Y}}_g\pm\hat{\sigma}_e t_{(n-2),(\alpha/2)} \quad \text{.....(2.37)}$$

ملاحظة: لما تكون (n) كبيرة نأخذ : $t_{(n-2),(0{,}025)}\approx 2$

11. خصائص المقدرات:

لنعتبر متغيرا عشـوائيا x ، حيث يكون توزيعه مرتبط بالمعلمة o المطلوب تقديرها. ولتقدير معلمة المجمع نوفق المعلومة المسـبقة التي يمكن أن ترافق المعلومات المعطاة من العينة. إن المعلومة المسـبقة تهتم بالمتغير (X) ، حيث يمكن أن تشـمل على فرضـيات حول الأشـكال التي تأخذها التوزيعات، قيمة بعض المعالم غير (θ) ، أو بعض التخصـصـات المتعلقة ب(θ) نفسـها. إن المعلومات المأخوذة من العينة معطاة بواسـطة الملاحظات $(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2,.....\mathrm{X}_n)$ إن طريقة اسـتعمال هذه للحصـول على مقدر (θ) هو موصـوف بقانون التقدير المسـمى: المقدر، إن مقدر المعلمة(θ) هو$(\hat{\theta})$ ، ما دام$(\hat{\theta})$ مبني على أسـاس تعويض عينة الملاحظات (X) في قانون معين فإننا نكتب: $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,.....x_n)$

كما أن أبسط ميزة لتوزيع $(\hat{\theta})$ هو وسطها $E(\hat{\theta})$ وتباينها$\mathrm{var}(\hat{\theta})$ والمعرف كما يلي:[1]

$$\mathrm{var}(\hat{\theta})=E\left(\hat{\theta}-E(\hat{\theta})\right)^2=E(\hat{\theta}^2)-\left[E(\hat{\theta})\right]^2$$

بحيث أن الانحراف المعياري ل $(\hat{\theta})$ هو الجذر ألتربيعي لتباين$(\hat{\theta})$ ويعرف بأنه الخطأ المعياري ل$(\hat{\theta})$ كما نعرف كذلك:

خطأ المعاينة ..... $=\hat{\theta}-\theta$

قيمة التحيز ..... $=E(\hat{\theta})-\theta$

وسط مربع الخطأ ..... $=E(\hat{\theta}-\theta)^2$

إن خطأ المعاينة هو عبارة عن الفرق بين قيمة المقدر $(\hat{\theta})$ والقيمة الحقيقية للمعلمة المقدرة(θ) . ويتغير حجم (درجة) خطأ المعاينة من عينة لأخرى أما التحيز فهو الفرق بين وسـط توزيع العينة لمقدر ما والقيمة الحقيقية لتلك المعلمة. إن هذا الفرق (في التحيز) هو قيمة ثابتة يمكن أن تساوي الصـفر أو تختلف عنه، بينما وسط مربع الخطأ فهو مفهوم مرتبط بتشتت توزيع أي مقدر، وبالتالي فهو قريب لمفهوم التباين. إن الفرق بين تباين مقدر ما ووسـط مربع خطئه هو أن التباين يقيس تشـتت التوزيع حول وسـطه، بينما يقيس وسـط مربع الخطأ التشـتت حول قيمة المعلمة الحقيقية. إذا تطابق وسـط التوزيع مع القيمة الحقيقية للمعلمة يكون التباين ووسط مربع الخطأ متطابقين (متساويين).

[1] عبد القادر محمد عطية الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق مرجع سابق ص 25

ويمكن أن نبين العلاقة بين وسط مربع الخطأ (MSE) والتباين بوضوح كما يلي :

$$MSE(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 = E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta}) + E(\hat{\theta}) - \theta]^2 = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})) + (E(\hat{\theta}) - \theta)]^2$$
$$= E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2 + E(E(\hat{\theta}) - \theta)^2 + 2E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta}) - \theta)$$

وإذا أخذنا الحد الأخير فنجد:

$$2E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})][E(\hat{\theta}) - \theta] = 2[(E(\hat{\theta}))^2 - (E(\hat{\theta}))^2 - \theta E(\hat{\theta}) + \theta E(\hat{\theta})] = 0$$

ومنه نستنتج أنه:

$$MSE(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2 + E(E(\hat{\theta}) - \theta)^2$$ .....(التباين) + (مربع التميز)

وهذا يعني أنه يستحيل أن تكون قيمة وسط مربع الخطأ (MSE) أصغر من التباين، ويكون الفرق بينهما هو مربع التحيز الذي يساوي الصفر في حالة تساوي المقدارين.

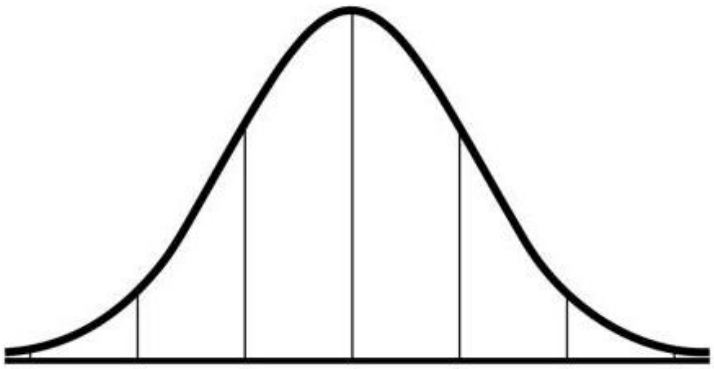
بعد شرحنا لهذا المفهوم يمكن أن نصف بعض خصائص المقدرات المفصلة والمتعارف عليها في الإقتصاد القياسي. ونقسم هذه الخصائص إلى نوعين، وذلك تبعا لحجم العينة الموجودة تحت البحث أو الدراسة. فهنالك خصائص العينات الصغيرة وتهتم بتوزيعات المعاينة المعتمدة على حجم الثابت والمتناهي وتطبق على العينات صغيرة الحجم. وهنالك الخصائص التقاربية، أو خصائص العينات الكبيرة.

وتهتم بتوزيعات المعاينة المعتمدة على حجم العينات الكبيرة والتي تقترب من مالا نهاية، ويفترض في هذه الخصائص أن تكون صحيحة تقاربيا عندما يكون حجم العينة كبيرا، وليس بالضرورة أن تكون صحيحة عند يصغر حجم العينة.

1. **خصائص العينات الصغيرة:**

أ. **عدم التحيز:**

إن عدم تحيز مقدر ما $(\hat{\theta})$ ، هو ذلك المقدر الذي يكون وسطه $E(\hat{\theta})$ مساوي لقيمة المعلمة الحقيقية (θ) ، والتي قد قمنا بتقديرها. وتعرف كما يلي: يكون $(\hat{\theta})$ مقدر (θ) غير المتحيز إذا توفر الشرط: $E(\hat{\theta}) = (\theta)$



شكل (3)

فمن الشكل (3)، ما دام التوزيع المبين متناظر والوسط $E(\hat{\theta})$ متمركز في وسط التوزيع ومساوي للقيمة الحقيقية للمعلمة (θ) ، يمكن أن نأخذ مثالا للمقدرة غير المتحيز من وسط العينة كمقدر لوسط المجمع كمايلي: $E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} + \Sigma X_i\right) = \frac{1}{n}\Sigma E(X_i) = \frac{1}{n}nu = u$

حيث ان : $E(X_i) = u$

ومنه نستنتج بأن عدم التحيز ليس بخاصية كاملة وذلك لأنها لا تأخذ بعين الإعتبار تشتت توزيع المقدر. ففي الحياة العملية يمكن أن نحصل على مقدر غير متحيز ولكن بتباين كبير، أو على مقدر متحيز وبتباين صغير عن الأول، فنختار أيهما أحسن. وهذا يشجعنا على البحث عن خاصية أخرى.

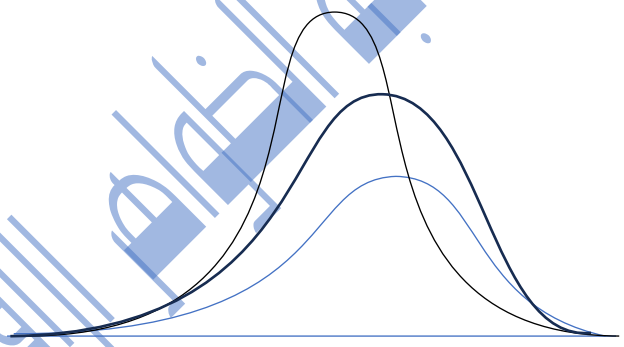
ب. **الكفاءة efficiency**

نظرا للمشكل المذكور في الخاصية الأولى، فإن بعض الكتاب يساوون الكفاءة مع أصغر وسط بمربع الخطأ (MSE) minimum ، وبعضهم يعرف الكفاءة بالنسبة للعينات الكبيرة فقط، والبعض الآخر يعتبر أن مقدرا ما يكون كفؤا (efficient) إذا وفقط إذا كان غير متحيز وفي نفس الوقت يكون له أصغر تباين. وهذا ما هو معمول به في تقنيات الإقتصاد القياسي الحديث. إذن يكون $(\hat{\theta})$ هو مقدر (θ) الكفؤ إذا توفر الشرطان:

- 1)..... غير متحيز $(\hat{\theta})$.
- 2)... $\text{var}(\hat{\theta}) \leq \text{var}(\tilde{\theta})$

حيث أن $(\tilde{\theta})$ هو أي مقدر آخر ل (θ) غير متحيز.

- ويعرف المقدر الكفؤ بأنه ذلك المقدر غير المتحيز وذو أصغر تباين أو أفضل مقدر غير متحيز (bue) كما نلاحظ بأن المقدر المتحيز لا يمكن أن يكون كفؤ حتى وإن كان له أصغر تباين، ويمكن شرح ذلك من خلال الشكل التالي:



شكل (4)

من الشكل (4) لدينا توزيعات 3 مقدرات ل (θ) وهي $(\hat{\theta})$ $\left(\hat{\hat{\theta}}\right)$، $\left(\hat{\hat{\hat{\theta}}}\right)$. ومن خلال المقدرات لدينا $(\hat{\theta})$ لها أصغر تباين ولكنها غير كفؤة لأنها متحيزة. بينما $\left(\hat{\hat{\theta}}\right)$. $\left(\hat{\hat{\hat{\theta}}}\right)$. هما مقدران غير متحيزان، لكن $\left(\hat{\hat{\hat{\theta}}}\right)$ لها تباين أكبر من تباين $\left(\hat{\hat{\theta}}\right)$. وبالتالي فإن $\left(\hat{\hat{\theta}}\right)$ هو مقدر غير كفؤ. وهذا يترك $\left(\hat{\hat{\theta}}\right)$ هو المقدر الكفؤ شريطة ألا يكون هناك مقدر آخر غير متحيز وبأصغر تباين من تباين $\left(\hat{\hat{\theta}}\right)$ نلاحظ بأنه عندما تكلمنا عن خاصية عدم التحيز قمنا بمجرد تطبيق التوقع الرياضي على المعلمة المقدرة أي وسط توزيع المعاينة $E(\hat{\theta})$. بينما بالنسبة لخاصية الكفائة فإن القضية أصبحت معقدة أكثر، بحيث أننا أصبحنا مجبرين على إجراء مقارنة بين تباينات كل المقدرات غير المتحيزة الموجودة لدينا. فيمكن أن يكون عدد هذه المقدرات لا نهائي.

وبالتالي يصعب الحصول على أحسنها. وللخروج من هذه المشكلة جاءت نظرية متراجحة كرامر رو **kramer rao** والتي لا نرى ضرورة لشرحها في هذه المرحلة من تحليلنا.

ت. أفضل مقدر خطي غير متحيز: Blue

لاحظنا في الخاصية الثانية، أنه إذا كانت لدينا مجموعة كبيرة من المقدرات غير المتحيزة، فإن مشكلة الحصول على أصغر تباين (وبالتالي على أكفأ مقدر)، تعتبر صعبة في بعض الأحيان، وذلك حتى وإن إستعنا بمتراجحة كرامر رو، وللخروج من هذه الدائرة نأخذ مجموعة أصغر من المقدرات غير المتحيزة، وذلك بتقيدنا بمجموعة المقدرات غير المتحيزة والخطية في نفس الوقت. فعند تقيدنا بمجموعة المقدرات غير المتحيزة وذات الدوال الخطية هي نفس عينة الملاحظات (مع الإحتفاظ) بخاصية عدم التحيز وأصغر تباين) نحصل على أفضل مقدر خطي غير متحيز والذي من شروطه:[1]

يكون $(\hat{\theta})$ أفضل مقدر خطي غير متحيز Blue إذا تحققت الشروط:

أ. $(\hat{\theta})$ دالة خطية لعينة الملاحظات

ب. $(\hat{\theta})$ مقدر (θ) غير المتحيز

ت. $\text{var}(\hat{\theta}) \leq \text{var}(\tilde{\theta})$

حيث أن $(\hat{\theta})$ هو أي مقدر خطي غير متحيز آخر ل (θ)

إن شرط الخطية يعني أنه من أجل العينة $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ يجب ان يكون المقدر على شكل:

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots\ldots + a_nX_n$$

حيث أن $a_1, a_2, \ldots, a_n$ هي ثوابت ومنه فإن $(\overline{X})$ هي مقدرخطي لأن

$$(\overline{X}) = \left(\frac{1}{n}\Sigma X_i\right) = \left(\frac{1}{n}X_1 + \frac{1}{n}X_2 + \ldots\ldots + \frac{1}{n}X_n\right)$$

- هناك 3 نقاط يمكن أن نستنتجها من تقيدنا بالمقدر الخطي:

✓ إذا كان المقدر خطيا في عينة الملاحظات، يكون في هذه الحالة Blue والمقدر الكفؤ متطابقين.

✓ إذا كان المقدر الكفؤ خطيا تقاربيا يكون في هذه الحالة Blue غير كفؤ، لكن يكون تباينه أقرب إلى تباين المقدر الكفؤ.

✓ إذا كان المقدر الكفؤ غير خطي بصفة قطعية، يكون في هذه الحالة تباين المقدر الكفؤ أصغر نوعا ما عن تباين Blue .

هناك خاصة أخرى تتعلق بالعينات الصغيرة وهي خاصة المقدر الوافي نقول بأن المقدر $(\hat{\theta})$ وافي إذا استعمل كل المعلومات حول المعلمة التي تحتويها العينة. فما دام قيمة كل ملاحظة تشرح لنا شيئا حول وضعية المجتمع، فإن أي مقدر لكي يكون وافيا، يجب أن يعتمد على كل قيم عينة الملاحظات. ومنه فإن

[1] عبد القادر محمد عبد القادر، طرق قياس العلاقات الاقتصادية مع تطبيقات على الحاسوب الالكتروني الإسكندرية دار الجامعات المصرية، 1990، ص 78

الوسط الحسابي للعينة ليس بالمقدر الوافي لأنه لا يستعمل كل قيم عينة الملاحظات وتكون خاصية المقدر الوافي شرط ضروري للمقدر الكفؤ.

ملاحظة:

- إن الخواص الثلاث معرفة بواسطة وسطها وتباينها، وليس لها علاقة بالمقدرات التي ليس لها وسط وتباين. فمثلا، نأخذ خاصة عدم التحيز، إذا كان $(\hat{\theta})$ مقدر (θ) ذو التوزيع المستمر والمعرف بواسطة $f(\hat{\theta})$ ، ولكي تكون $(\hat{\theta})$ غير متحيزة يجب أن يكون:

$$E(\theta) = (\hat{\theta})$$

لكن بالتعريف لدينا: $E(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta} f(\hat{\theta})\, d\hat{\theta}$

نجد أن المساحة الموجودة تحت المنحنى $f(\hat{\theta})$ والمقاسة من $(-\infty)$ إلى $(+\infty)$ يمكن أن تكون ما لا نهاية. فإذا كانت كذلك، يكون التكامل متصاعدا. ومنه لا يوجد وسط لهذا التوزيع.

2. خصائص العينات الكبيرة (أو الخصائص التقاربية)

أ. عدم التحيز التقاربي

تكون $(\hat{\theta})$ مقدر تقاربي غير متحيز ل (θ) إذا كانت. $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \theta$

وهذا يعني بأن أي مقدر يكون تقاربيا غير متحيز إذا كلما إقترب حجم العينة من مالا نهاية يصبح غير متحيز. كما أنه إذا كان المقدر غير متحيز أصلا، فإنه يكون ضمنيا غير متحيز تقاربيا، بينما العكس ليس دائما صحيحا. وكمثال على ذلك نأخذ $\tilde{\sigma}_u^2$ (مقدر المعقولية العظمى)

$$\tilde{\sigma}_u^2 = \left(\Sigma\left(Y_i - \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}X_i\right)^2/n\right) = \Sigma e_i/n$$

$$E\left(\tilde{\sigma}_u^2\right) = \left[E\left(\Sigma e_i\right)/n\right] = \frac{n-2}{n}\sigma_u^2$$ متحيز

لكن عندما يكون حجم العينة n كبيرا. $\lim_{n\to\infty} E\left(\tilde{\sigma}_u^2\right) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n-2}{n}\right]\sigma_u^2 = \sigma_u^2$

وتصبح $\tilde{\sigma}_u^2$ غير متحيزة تقاربيا.

ب. الاتساق consistency

تكون مقدرة المتسقة اذا كانت :[1]

حيث ان $p\lim$ هي نهاية الاحتمال

1) $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = p\lim(\hat{\theta}) = \theta$ .....

2) $\lim_{n\to\infty}\left[\mathrm{var}(\hat{\theta})\right] = p\lim\left[\mathrm{var}(\hat{\theta})\right] = 0$

ولمعرفة ما إذا كان مقدرا ما متسقا، نلاحظ تحيزه وتباينه عندما يقترب حجم العينة من مالا نهاية. فإذا كان ارتفاع حجم العينة مرافق بانخفاض في قيمة التحيز والتباين، ويستمر ذلك الانخفاض في التحيز

[1] عصام عزيز شريف، مقدمة في القياس الاقتصادي، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1981، ص 79

والتباين حتى يقترب من الصفر أو يساويه لما تقترب n من مالا نهاية، نقول بأن ذلك المقدر هو مقدر متسق، وكمثال على ذلك نأخذ.

$$\hat{\alpha} = \alpha + \sum\left(\frac{1}{n} - \frac{\mathrm{X}x_i}{\Sigma x_i^2}\right)(U_i) = \alpha + p\lim\left(\frac{\Sigma u_i}{n}\right) - \overline{\mathrm{X}}p\lim\left[\frac{n\Sigma x_i u_i}{\Sigma x_i^2}\right] \Big/ n$$

$$= \alpha + p\lim\left(\frac{\Sigma u_i}{n}\right) - p\lim\left[n\overline{\mathrm{X}}\frac{\Sigma x_i u_i}{n} \Big/ \frac{\Sigma x_i^2}{n}\right]$$

$$= \alpha + p\lim\left(\frac{\Sigma u_i}{n}\right) - p\lim\left[n\frac{\Sigma \mathrm{X}_i}{n}\frac{\Sigma x_i u_i}{n} \Big/ \frac{\Sigma x_i^2}{n}\right]$$

$$= \alpha + p\lim\left(\frac{\Sigma u_i}{n}\right) - p\lim n\frac{\mathrm{X}_i}{n}\, p\lim\frac{\Sigma x_i u_i}{n} \Big/ p\lim\left(\Sigma x_i^2/n\right)$$

$$= \alpha$$

$$p\lim[\mathrm{var}(\hat{\alpha})] = \sigma_u^2\, p\lim\left(\Sigma \mathrm{X}_i^2/n\Sigma x_i^2\right) = p\lim\left(\sigma_u^2/n\right)\left[p\lim\left(\Sigma \mathrm{X}_i^2/n\right)/\, p\lim\left(\Sigma x_i^2/n\right)\right] = 0$$

ت. الكفائة التقاربية: Asymptotic Efficiency

- تكون $(\hat{\theta})$ مقدرة كفوؤة تقاربيا ل (θ) إذا توفرت الشروط التالية:

a) $(\hat{\theta})$ مقدرة منسقة

b) $(\hat{\theta})$ لها توزيع تقاربي بوسط وتباين مختلفين عن مالا نهاية

c) لا يوجد مقدر منسق آخر له تباين تقاربي أصغرمن التباين التقاربي ل $(\hat{\theta})$.

بحيث أن تعريف التباين التقاربي هو:

$$Asymptotic\ Var(\hat{\theta}) = Avar(\hat{\theta}) = \frac{1}{n}\lim_{n\to\infty} E\left[\sqrt{n}\left(\hat{\theta} - \lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta})\right)\right]^2$$

سلسلة تمارين 01 :

1) في المعادلات الطبيعية المحصل عليها في النموذج ذو متغيرين كيف يمكن إثبات ما يلي:[1]

$$a)\ Min\Sigma e_i^2 \quad , \quad b)\ \Sigma e_i = 0$$

2) لدينا النموذج البسيط التالي: $\mathrm{Y}_i = \beta \mathrm{X}_i + u_i$

أوجد المعادلات الطبيعية والمقدر $\hat{\beta}$

3) نفرض أنه لديك عينة من 5 عوائل لها دخول سنوية، ومدخرات (بآلاف الدولارات) كالتالي :

العائلة	a	b	c	d	E
الدخلx	8	11	9	6	6
الادخار	0.6	1.2	1.0	0.7	0.3

a) حدد (s) في (x) لكل عائلة من العوائل

b) أحسب وأرسم خط انحدار الادخار (s) في الدخل (x)

[1] عصام عزيز شريف، مقدمة في القياس الاقتصادي، مرجع سابق ص 98

c) إشرح معالم الانحدار

4) استعمل البيانات الموجودة في التمرين (3) لتحدد الاستهلاك(c)في الدخل (x) حيث أن

$c = x - s$. ثم قارن هذا الميل مع ميل السؤال الثالث

5) لديك النموذج البسيط $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ أثبت أن $\Sigma x_i y_i = \Sigma x_i Y_i$ وبالتالي $\hat{\beta} = \Sigma x_i y_i / \Sigma x_i^2$

6) لنفرض أن دالة الإستهلاك الإجمالي لمجتمع ما هي: $C_i = \alpha + \beta X_i + U_i$

a) إشرح المعالم α, β .

b) أكتب معادلة الإدخار الإجمالية المناسبة لدالة الإستهلاك أعلاه وإشرح معالمها.

c) عرف العلاقة الموجودة مابين معالم دالتي الإدخار والإستهلاك

7) لتكن دالة الطلب عن أحذية تحمل علامة جامعة الجزائر هي $Q = \alpha + \beta P + U$

a) إشرح المعالم α, β . وحدد إشارتهما.

b) ضع قائمة بأسماء المتغيرات المهمة التي نظن أنها محذوفة من دالة الطلب المكتوبة أعلاه.

8) لديك النموذج الخطي البسيط مع فرضياته الأساسية $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$

a) بين أنه نستطيع تعريف (ESS) كما يلي:

$$ESS = \Sigma(Y_i - \overline{Y})^2 - \hat{\beta}\Sigma(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) = \Sigma(Y_i - \overline{Y})^2 - \hat{\beta}\Sigma(X_i - \overline{X})^2$$

B) إذا كان معامل الإرتباط معرف كما يلي: ..... $r = \Sigma x_i y_i / \sqrt{\Sigma x_i^2 \Sigma y_i^2}$

فأثبت أن $R^2 = r^2$

c) بين أن $\Sigma(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 = \hat{\beta}^2 \Sigma x_i^2$

9) ليكن النموذج في (1) بين أن ESS + RSS = TSS وإذا كان (r) هو معامل الإرتباط بين (X) و(Y)

مثلما معرف في (1) بين أن ..... $\Sigma e_i^2 = (1 - r^2)\Sigma(Y_i - \overline{Y})^2$

وبين أن الإختبار (t) للفرضية (β=0) يكتب على الشكل:..... $r\sqrt{n-2}/\sqrt{1-r^2}$

10) لدينا النموذج كما في (1) مع $(w_i = x_i / \Sigma x_i^2)$ أثبت أن:$(\Sigma w_i = 0)$ ، $(\Sigma w_i^2 = 1/\Sigma x_i^2)$ ، $(\Sigma w_i x_i = \Sigma w_i X_i)$

وكذلك: $(\Sigma d_i = 0)$ ، $(\Sigma d_i X_i = \Sigma d_i x_i = 0)$

حيث أن : (أي مقدر غير متحيز) $\rightarrow \left(\hat{\hat{\beta}} = \Sigma c_i Y_i\right)$. $c_i = w_i + d_i$

11) نفرض أن (X_1, X_2) هما متغيران مستمران مع دالة التوزيع الإحتمالي المكملة $f(X_1, X_2)$ بين أن :

$$\text{var}(aX_1 + bX_2) = a^2 \text{var}(X_1) + b^2 \text{var}(X_2) + 2ab\,\text{cov}(X_1, X_2)$$

12) لديك النموذج كما في (1) بإستعمال طريقة الإنحراف للمربعات الصغرى بين مايلي:

(a $\Sigma e_i = \Sigma \hat{u}_i = 0$

(b $\Sigma e_i X_i = \Sigma \hat{u}_i X_i = 0$

(c $\Sigma e_i \hat{Y}_i = \Sigma \hat{u}_i \hat{Y}_i = 0$

(d $\Sigma(Y_i - \hat{Y}_i)(\hat{Y}_i - \overline{Y}) = 0$

(e $\hat{\sigma}_u^2$ هو مقدر σ_u^2 غير المتحيز

13) من خلال عينة مكونة من 200 ملاحظة حصلنا على الكميات التالية:[1]

$\Sigma X_i Y_i = 22,13 \; \Sigma X_i = 11,34$ ، $\Sigma Y_i = 20,72$ ، $\Sigma X_i^2 = 12,16$ ، $\Sigma Y_i^2 = 84,96$ ،

أحسب المقدرات $(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\beta}, \hat{\alpha})$ مباشرة من هذه المعطيات.

14) في عينة أخرى تتكون من 20 ملاحظة حصلنا على الكميات التالية:

$\Sigma x_i^2 = 215,4 \; \Sigma Y_i = 21,90$ ، $\Sigma y_i^2 = 86,9$ ، $\Sigma x_i y_i = 106,4$ ، $\Sigma X_i = 1862$ ،

أحسب المقدرات $(\hat{\sigma}_u^2, \hat{\beta}, \hat{\alpha})$ فإذا فرضنا أن $(\hat{\sigma}_u^2 = \sigma_u^2)$ فما هي قيمتي $\hat{\text{var}}(\hat{\alpha}), \hat{\text{var}}(\hat{\beta})$

15) نفرض أنك مسـؤول البنك المركزي للنقود في بلد ما، تعطى لك البيانات التاريخية التالية لكمية النقود والدخل الوطني بملايين الدولارات.

السنوات	1973	74	75	76	77	78	79	80	81	82
كمية النقود (X)	2.0	2.5	3.2	3.6	3.3	4.0	4.2	4.6	4.8	5.0
الدخل الوطني (Y)	5.0	5.5	6.0	7.0	7.2	7.7	8.4	9.0	9.7	10.0

a) أرسم هذه النقاط في شكل إنتشاري ثم أوجد مقدرات إنحدار الدخل الوطني (Y) كمية النقود (X).

b) كيف تشرح حد الكفاف Intercept والميل slope في هذه المعادلة

c) إذا كانت لديك وسيلة لمراقبة عرض النقود، وتمنيت الوصول بمستوى الدخل الوطني الى (12 وحدة) في سنة 1983، في أي مستوى يمكنك ووضوع كمية النقود المعروضة؟ إشرح

d) ماذا يحدث لمقدرات المربعات الصـغرى (حد الكفاف والميل) عندما تكون كل ملاحظات المتغير التابع متساوية؟ هل يمكنك شرح هذه الظاهرة؟

16) يعطي لك النموذج المقدر $\left[\hat{Y}_i = 1,38 + 0,12X_i\right]$ مع المعلومات

$\lambda = 5\%$ ، $\Sigma x_i^2 = 162$ ، $\Sigma e_i^2 = 0.6528$ ، $n = 8$

أوجد مجال الثقة ل β.

واختبر الفرضية: $Ho: \beta = 0$ vs $HA: \beta \neq 0$

17) لديك النمودج: $C_i = \alpha + \beta X_i + U_i$ ومقدره هو:

$$n = 80 : \hat{C}_i = 623,28 + 0,402 X_i$$

$\lambda = 5\%$ المستوى (147.54) (2.91)

إختبر صحة الفرضية $Ho: \alpha = 0$ vs $Ha: \alpha \neq 0$ وكذلك $Ho: \beta = 0$ vs $Ha: \beta \neq 0$

ما رأيك في النموذج.

إذا غيرنا النموذج إلى الشكل: $C_i = \alpha + \beta Y_d + U_i$. حيث (Y_d) هي الدخل المتاح

فيصبح النموذج المقدر $\hat{C}_i = -7,37 + 0,90 Y_d$ مع العلم أن $(\hat{\alpha}/SE(\hat{\alpha})) = 2.44$

$(\hat{\beta}/SE(\hat{\beta})) = 201.23$. $n = 80$ قم بنفس الإختبارات وما حكمك على النموذج.

[1] عصام عزيز شريف، مقدمة في القياس الاقتصادي، مرجع سابق ص75

المحور الثالث

نماذج الإنحدار الخطي المتعدد

محاضرات في نمذجة الظواهر الاقتصادية

نتطرق في هذا المحور عن نماذج الإنحدار التي تحتوي على أكثر من متغير واحد (وذلك بالإضافة إلى الحد الثابت). نبدأ بوصف الفرضيات التي يبنى على أساسها نموذج الإنحدار الخطي ذو أكثر من متغير مستقل واحد، ثم كيف يمكن لمقدرات معالم الإنحدار للمربعات الصغرى أن تحصل في نموذج يتكون من متغيرين مستقلين.[1]

نتكلم عن شرح معالم الإنحدار والإحصائيات في النموذج الجديد. كما سنتعرض لمشكل الإرتباط فيما بين المتغيرات المستقلة.

I. نموذج الإنحدار بمتغيرين مستقلين وفرضياته الأساسية

نمدد النموذج البسيط بفرض أن المتغير التابع (Y) هو دالة خطية للمتغيرات المستقلة x_1 ، x_2 ، x_3 وللخطأ العشوائي ui . إن هذا النموذج هو مجرد تطوير للنموذج البسيط ومنه فلا داعي لإشتقاق كل نتائجها بالتفصيل مادامت تحصل بنفس الطريقة المستعملة في الفصل الثاني. ونكتب نموذج الإنحدار الخطي ذو متغيرين مستقلين على الشكل:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.1)$$

حيث أن (β_j) هي معالم النموذج المطلوب تقديرها: $j = 1,2,3\ldots\ldots$

(Y_i) هي المتغير التابع، (X_{ji}) هي متغيرات موضحة (مستقلة) حيث أن

$j = 1,2,3$ ، $i = 1,2$

(u_i) هي المتغير العشوائي (أو الأخطاء العشوائية).

فمثلا، تمثل (X_{2i}) الملاحظة (i) الخاصة بالمتغير الموضح (X_2) ، هي الحد الثابت للمعادلة. ويفضل في معظم الحالات كتابة النموذج (3.1) على الشكل:

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.1)$$

حيث أن $(X_{1i} = 1)$ لكل الملاحظات $i = 1,2,3\ldots\ldots n$

ويساعدنا الشكل الأخير على سهولة إستعمال المصفوفات في تحاليلنا المتطورة أو التي تأتي فيما بعد عند مناقشتنا لنموذج الإنحدار الخطي العام $(G.L.M)$. إن الفرضيات الأساسية لنموذجنا الجديد تشبه إلى حد ما تلك الموجودة في الفصل الثاني. فبالإضافة إلى الفرضيات (a,b,c,d,e) ، الموجودة في الفصل الثاني، نضيف إلى الفرضية (e) الأخيرة بأنه لاتوجد علاقة خطية صحيحة مابين متغيرين أو أكثر من المتغيرات المستقلة أو الموضحة، كما أن عدد الملاحظات يفوق عدد المعالم المطلوب تقديرها في النموذج. وسنناقش مخالفة هذه الفرضيات في الفصل الرابع بالتفصيل.

II. المعادلات الطبيعية للمربعات الصغرى العادية

لنأخذ نموذج الإنحدار ذو متغيرين مستقلين كما في (3.1). فيكون نموذج الإنحدار المقدر على الشكل:

[1] صالح تومي، مدخل لنظرية القياس الاقتصادي مرجع سابق ص97

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$$

حيث أن $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$ هي مقدرات المربعات الصغرى لمعالم $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ على الترتيب، و $(\hat{Y}_i)$ هي القيمة التقديرية للمتغير التابع (Y_i). وكما هو معروف فإن الحصول على هذه المقدرات، يكون بواسطة تصغير مجموع مربعات البواقي وهي:

$$ESS = \Sigma \hat{u}_i = \Sigma\left(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i}\right)^2 = \Sigma\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 \quad \ldots\ldots (3.2)$$

وبإشتقاق (ESS) جزئيا بالنسبة للمعالم غير المعروفة ومساوات نتائجها للصفر نجد:

$$\partial ESS/\partial \hat{\beta}_1 = \partial \Sigma\left(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i}\right)^2 / \partial \hat{\beta}_1 = 0$$
$$\partial ESS/\partial \hat{\beta}_2 = \partial \Sigma\left(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i}\right)^2 / \partial \hat{\beta}_2 = 0$$
$$\partial ESS/\partial \hat{\beta}_3 = \partial \Sigma\left(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i}\right)^2 / \partial \hat{\beta}_3 = 0$$

ومنه نحصل على المعادلات الطبيعية للمربعات الصغرى على الشكل:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma Y_i &= N\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \Sigma X_{2i} + \hat{\beta}_3 \Sigma X_{3i} \\ \Sigma X_{2i} Y_i &= \hat{\beta}_1 \Sigma X_{2i} + \hat{\beta}_2 \Sigma X_{2i}^2 + \hat{\beta}_3 \Sigma X_{2i} X_{3i} \\ \Sigma X_{3i} Y_i &= \hat{\beta}_1 \Sigma X_{3i} + \hat{\beta}_2 \Sigma X_{2i} X_{3i} + \beta_3 \Sigma X_{3i}^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3.3)$$

ولتبسيط نتائجها نأخذ النموذج (3.1) في شكل إنحرافات كما يلي:[1]

$$y_i = \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + u_i \quad \ldots\ldots (3.4)$$

حيث أن: $x_{2i} = X_{2i} - \overline{X}_2, x_{3i} = X_{3i} - \overline{X}_3, \overline{X}_2 = \Sigma X_{2i}/N, \overline{X}_3 = \Sigma X_{3i}/N$

ويكون النموذج المقدر هو: $\hat{y}_i = \hat{\beta}_2 x_{2i} + \hat{\beta}_3 x_{3i}$ .....

حيث أن $\hat{y}_i = \left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)$ ومنه يكون: $ESS = \Sigma\left(y_i - \hat{\beta}_2 x_{2i} - \hat{\beta}_3 x_{3i}\right)^2$ ..... (3.5)

وللحصول على المعادلات الطبيعية نتبع نفس الطريقة السابقة حيث:

$$\left.\begin{aligned} \partial ESS/\partial \hat{\beta}_2 = \partial \Sigma\left(y_i - \hat{\beta}_2 x_{2i} - \hat{\beta}_3 x_{3i}\right)^2 / \partial \hat{\beta}_2 = 0 \Rightarrow \Sigma x_{2i} y_i = \hat{\beta}_2 \Sigma x_{2i}^2 + \hat{\beta}_3 \Sigma x_{2i} x_{3i} \\ \partial ESS/\partial \hat{\beta}_3 = \partial \Sigma\left(y_i - \hat{\beta}_2 x_{2i} - \hat{\beta}_3 x_{3i}\right)^2 / \partial \hat{\beta}_3 = 0 \Rightarrow \Sigma x_{3i} y_i = \hat{\beta}_2 \Sigma x_{2i} x_{3i} + \hat{\beta}_3 \Sigma x_{3i}^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3.6)$$

وتسمى (3.6) بالمعادلات الطبيعية للمربعات الصغرى وشكلها الإنحرافي.

وللحل نضرب المعادلة الأولى من (3.6) بالقيمة (Σx_{3i}^2) والثانية بالمقدار $(\Sigma x_{2i} x_{3i})$ ثم نطرح هذه الأخيرة من الأولى لنجد:

$$(\Sigma x_{2i} y_i)(\Sigma x_{3i}^2) - (\Sigma x_{3i} y_i)(\Sigma x_{2i} x_{3i}) = \hat{\beta}_2 \left[(\Sigma x_{2i}^2)(\Sigma x_{3i}^2) - (\Sigma x_{2i} x_{3i})^2\right]$$

وتصبح قيمة المقدرتين $(\hat{\beta}_3, \hat{\beta}_2)$ مباشرة:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(\Sigma x_{2i} y_i)(\Sigma x_{3i}^2) - (\Sigma x_{3i} y_i)(\Sigma x_{2i} x_{3i})}{(\Sigma x_{2i}^2)(\Sigma x_{3i}^2) - (\Sigma x_{2i} x_{3i})^2} \quad \ldots\ldots (3.7)$$

$$\hat{\beta}_3 = \frac{(\Sigma x_{3i} y_i)(\Sigma x_{2i}^2) - (\Sigma x_{2i} y_i)(\Sigma x_{2i} x_{3i})}{(\Sigma x_{2i}^2)(\Sigma x_{3i}^2) - (\Sigma x_{2i} x_{3i})^2} \quad \ldots\ldots (3.8)$$

[1] صالح تومي، مدخل لنظرية القياس الاقتصادي مرجع سابق ص105

أما إذا قسمنا المعادلة الأولى من المعادلات الطبيعية (3.3) على حجم العينة n نجد.

$$\hat{\beta}_1 = \bar{?} - \hat{\beta}_2 \bar{?}_2 - \hat{\beta}_3 \bar{?}_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.9)$$

وإذا إستعنا بالمعادلة (3.5) نجد أن:

$$\Sigma\left[\left(y_i - \hat{\beta}_2 x_{2i} - \hat{\beta}_3 x_{3i}\right)x_{2i}\right] = \Sigma(y_i - \hat{y}_i)x_{2i} = 0$$
$$\Sigma\left[\left(y_i - \hat{\beta}_2 x_{2i} - \hat{\beta}_3 x_{3i}\right)x_{2i}\right] = \Sigma(y_i - \hat{y}_i)x_{2i} = 0$$

ونستنتج أن:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma\hat{u}_i x_{2i} = 0\\ \Sigma\hat{u}_i x_{3i} = 0\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.10)$$

إن شرح معالم الإنحدار يتطلب منا توسيع (تمديد) تحليلنا للنموذج البسيط. فمثلا، في النموذج (3.1) نقيس المعلمة (β_2) التغير الحاصل في (Y) والمرتبط بتغير وحدة واحدة في المتغير المستقل (X_2) بفرض أن كل القيم الأخرى للمتغيرات المستقلة تبقى ثابتة، أما المعلمة (β_3) فتقيس المتغير الحاصل في (Y) والمرتبط بتغير (X_3) بوحدة واحدة بفرض أن القيم الأخرى تبقى ثابتة وهكذا.

إذن في كلتا الحالتين تكون فرضية بقاء المتغيرات الستقلة الأخرى ثابتة أساسية وجوهرية عند شرحنا للمعالم. وتسمى هذه الطريقة بمعالم الإنحدار الجزئي. حيث أن (β_2)، مثلا، نقيس أثر (X_2) في (Y) ولكن مع مراقبة أثر (X_3) حتى يبقى ثابتا، نظريا، نحصل على مفهوم خاص عندما تثبت (X_3) لزيادة قيمة (X_2)، لكن كيف يمكن تطبيق ذلك لما نحصل على مقدر المربعات الصغرى $(\hat{\beta}_2)$ (وفي نفس الوقت على $(\hat{\beta}_3)$.)؟ إن الجواب يكمن في تحقيق حساب المقدرات في النموذج (3.1) بواسطة تكوين إنحدارين لنموذجين ذو متغيرين (Two-Two variable regression) (ونعمم هذه النتيجة إلى أي نموذج إنحدار آخر ذو أكثر من متغيرين مستقلين). حيث يعدل الإنحدار الأول المتغير (X_2)، (يبقى أثر (X_3) ثابتا)، بينما يقدر الإنحدار الثاني أثر هذا المتغير المعدل على (Y) وتجري العملية كما يلي.

الخطوة الأولى:

حدر (X_2) في (X_3). وعندما نقدر المعادلة، نستطيع حساب القيم التقديرية والبواقي للنموذج وللتبسيط نستعمل البيانات المنحرفة، حيث يكون النموذج المقدر

$$x_{2i} = \hat{\alpha}x_{3i} + \hat{u}_i \Rightarrow x_{2i} = \hat{x}_{2i} + \hat{u}_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.11)$$

حيث أن: $\hat{x}_{2i} = \hat{\alpha}x_{3i}, \hat{u}_i = x_{2i} - \hat{\alpha}x_{3i} = x_{2i} - \hat{x}_{2i}$ .....

وكذلك تكون مقدرة المربعات الصغرى $(\hat{\alpha})$ على النحو

$$\hat{\alpha} = \Sigma x_{2i}x_{3i} / \Sigma x_{3i}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.12)$$

وينصب إهتمامنا الآن حول البواقي $(\hat{u}_i)$، لأن $(\hat{u}_i)$ تمثل ذلك النصب (الجزء) من (X_{2i}) والذي هو مرتبط مع (X_{3i}).

الخطوة الثانية:

- حدر (Y_i) في $(\hat{u}_i)$ وإذا إستعملنا البيانات المنحرفة يكون

$$y_i = \Omega\hat{u}_i + v_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.13)$$

حيث أن (v_i) هو متغير عشوائي جديد، بينما $(\hat{u}_i)$ أصبحت متغيرا توضيحيا (مستقلا) وبعد تقدير هذه المعادلة بالمربعات الصغرى نجد:

$$\hat{\Omega} = \Sigma y_i \hat{u}_i / \Sigma \hat{u}_i^2 \quad \ldots\ldots (3.14)$$

وتمثل $(\hat{\Omega})$ أثر "(X_{2i}) المعدلة" في (Y_i). وإذا كان هذا صحيحا ينتج لدينا $(\hat{\Omega}) = (\hat{\beta}_2)$ على الشكل التالي:

لدينا المعادلة (3.14) . $\hat{\Omega} = \Sigma y_i \hat{u}_i / \Sigma \hat{u}_i^2$ وإذا إستعملنا المعادلتين (3.11) و(3.12) نجد:

$$\hat{u}_i = x_{2i} - \hat{\alpha} x_{3i} = x_{2i} - \left[\frac{\Sigma x_{2i} x_{3i}}{\Sigma x_{3i}^2}\right] x_{3i}$$

إذن لنعوض ذلك في المعادلة (3.14) فتصبح:

$$\hat{\Omega} = \Sigma y_i \hat{u}_i / \Sigma \hat{u}_i^2 = \frac{\Sigma x_{2i} y_i - \left[\frac{\Sigma x_{2i} x_{3i}}{\Sigma x_{3i}^2}\right] \Sigma x_{3i} y_i}{\Sigma x_{2i}^2 + \left(\frac{\Sigma x_{2i} x_{3i}}{\Sigma x_{3i}^2}\right)^2 \Sigma x_{3i}^2 - 2\left(\frac{\Sigma x_{2i} x_{3i}}{\Sigma x_{3i}^2}\right) \Sigma x_{2i} x_{3i}}$$

وبعد ضرب البسيط والمقام بالمقدار (Σx_{3i}^2). وتبسيطها نجد: $\hat{\Omega} = \frac{(\Sigma x_{2i} y_i)(\Sigma x_{3i}^2) - (\Sigma x_{2i} x_{3i})(\Sigma x_{3i} y_i)}{(\Sigma x_{2i}^2)(\Sigma x_{3i}^2) - (\Sigma x_{2i} x_{3i})^2} = \hat{\beta}_2$

III. حساب معامل التحديد المضاعف $R^2_{Y.X_2X_3}$

- عندما يكون لدينا أكثر من متغير مستقل في نموذج الإنحدار الخطي، ننتقل معامل التحديد العادي (معامل الإرتباط البسيط) إلى معامل التحديد المضاعف، يسمى مربع معامل الإرتباط بمعامل التحديد المضاعف أو مربع معامل الإرتباط المضاعف. ويرمز له، عادة، بالرمز R^2 ثم نكتب بجانبه المتغيرات التي يعينها الإرتباط. فمثلا، في النموذج (3.1) يكون معامل التحديد المضاعف على الشكل $R^2_{Y.X_2X_3}$. ويبين R^2 هنا نسبة التغير الكلي في (Y) والمشروحة بواسطة خط الإنحدار، أي بواسطة التغير الحاصل في (X_2) و(X_3) ومن الفصل الثاني عرفنا R^2:[1]

$$R^2 = RSS/TSS = 1 - ESS/TSS = \Sigma \hat{y}_i^2 / \Sigma y_i^2 = \Sigma(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 / \Sigma(Y_i - \overline{Y})^2$$
$$= 1 - \Sigma \hat{u}_i^2 / \Sigma y_i^2 = (\Sigma y_i^2 - \Sigma \hat{u}_i^2) / \Sigma y_i^2 \quad \ldots\ldots (3.15)$$

ونعرف أن: $\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i$ مع $\hat{y}_i = \hat{\beta}_2 x_{2i} \hat{\beta}_3 x_{3i}$ لتصبح مجموع مربعات البواقي

$$\Sigma \hat{u}_i^2 = \Sigma \hat{u}_i \hat{u}_i = \Sigma \hat{u}_i (y_i - \hat{y}_i) = \Sigma \hat{u}_i (y_i - \hat{\beta}_2 x_{2i} - \hat{\beta}_3 x_{3i}) = \Sigma \hat{u}_i y_i - \hat{\beta}_2 \Sigma \hat{u}_i x_{2i} - \hat{\beta}_3 \Sigma \hat{u}_i x_{3i}$$

ومن (3.10) لدينا $\Sigma \hat{u}_i x_{2i} = \Sigma \hat{u}_i x_{3i} = 0$ لنجد أن:

$$\Sigma \hat{u}_i^2 = \Sigma \hat{u}_i y_i = \Sigma (y_i - \hat{y}_i) y_i = \Sigma y_i (y_i - \hat{\beta}_2 x_{2i} - \hat{\beta}_3 x_{3i}) = \Sigma y_i^2 - \hat{\beta}_2 \Sigma y_i x_{2i} - \hat{\beta}_3 \Sigma y_i x_{3i} \ldots\ldots (3.16)$$

وبالتعريف عن R^2 في (3.15) نجد:

$$R^2_{Y.X_2X_3} = \Sigma y_i^2 - (\Sigma y_i^2 - \hat{\beta}_2 \Sigma y_i x_{2i} - \hat{\beta}_3 \Sigma y_i x_{3i}) / \Sigma y_i^2 = (\hat{\beta}_2 \Sigma y_i x_{2i} + \hat{\beta}_3 \Sigma y_i x_{3i}) / \Sigma y_i^2 \ldots\ldots (3.17)$$

[1] صالح تومي، مدخل لنظرية القياس الاقتصادي مرجع سابق ص112

وتنحصر قيمة R^2 مابين الصفر والواحد $(0 \le R^2 \le 1)$. بقدر ا تكبر قيمة R^2 تكبر معها نسبة التغير في (Y) والمشروحة بواسطة خط الإنحدار. أي كلما كبرت قيمة R^2 كلما كان التوفيق أحسن لخط إنحدار العينة المسحوبة من المجتمع. وبالعكس، كلما إقتربت قيمة R^2 من الصفر كلما كان التوفيق أسوء.

IV. وسط تباين مقدرات المعالم

- يمكن الحصول على وسط مقدرات المعالم في النموذج (3.1) بنفس الطريقة المستعملة في الفصل الثاني. وتكون المقدرات $(\hat{\beta}_3, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1)$ مقدرات غير متحيزة. ونأخذ على سبيل المثال $(\hat{\beta}_2)$

$$\hat{\beta}_2 = \beta_2 + \frac{(\Sigma x_{3i}^2)(\Sigma x_{2i}u_i) - (\Sigma x_{2i}x_{3i})(\Sigma x_{3i}u_i)}{(\Sigma x_{2i}^2)(\Sigma x_{3i}^2) - (\Sigma x_{2i}x_{3i})^2} \quad \ldots\ldots(3.18)$$

فيكون: $E(\hat{\beta}_2) = \beta_2$

ونحصل على نفس الشيئ بالنسبة ل $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_3)$ ومنه نعمم الفكرة: $E(\hat{\beta}_j) = \beta_j \ldots . \forall j = 1,2,3 \ldots .$

وكما هو مبين (مشروح) في الفقرة (3،2،4) من هذا الفصل، يمكن كتابة التباينات على الشكل التالي:

$$\text{var}(\hat{\beta}_1) = \sigma_u^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}_2^2 \Sigma x_{3i}^2 + \overline{X}_3^2 \Sigma x_{2i}^2 - 2\overline{X}_2 \overline{X}_3 \Sigma x_{2i} \Sigma x_{3i}}{(\Sigma x_{2i}^2)(\Sigma x_{3i}^2) - (\Sigma x_{2i} x_{3i})^2} \right] \quad \ldots\ldots(3.19)$$

$$\text{var}(\hat{\beta}_2) = \sigma_u^2 / [\Sigma x_{2i}^2 (1 - r^2)] \quad \ldots\ldots(3.20) .$$

$$\text{var}(\hat{\beta}_3) = \sigma_u^2 / [\Sigma x_{3i}^2 (1 - r^2)] \quad \ldots\ldots(3.21)$$

$$\text{cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = \sigma_u^2 r / [(1 - r^2)\sqrt{\Sigma x_{2i}^2 \Sigma x_{3i}^2}] \quad \ldots\ldots(3.22)$$

حيث أن: $\left[r = \Sigma x_{2i} \Sigma x_{3i} / \left[\sqrt{\Sigma x_{2i}^2 \Sigma x_{3i}^2} \right] \right]$ وهو معامل الإرتباط البسيط بين (x_{2i}) و (x_{3i}) كما أن $(\hat{\sigma}_u^2)$ هو مقدر (σ_u^2) المتسق وغير المتحيز والمعرف بالقانون:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \Sigma \hat{u}_i^2 / (n - k) = ESS / (n - k) \quad \ldots\ldots(3.23)$$

V. إختبار معنوية المعالم

لكي نجري إختبارات المعنوية لمعالم الإنحدار الفردية، من الطبيعي أن نتساءل عن إمكانية تطبيق نظرية قوس- ماركوف على النموذج الخطي الموسع، كما نتساءل عن إمكانية الحصول على توزيعات مقدرات معالم الإنحدار. إن إشتقاق الخصائص الإحصائية لنموذج الإنحدار المحتوي على أكثر من متغير مستقل معقد نوعا ما بدون إستعمال حساب المصفوفات، ولهذا سنكتفي ببعض النتائج المهمة فقط في إنتظار مناقشة النموذج الخطي العام في فصل آخر.[1]

إن إختبار المعنوية التقليدي لمقدرات المعالم هو إختبار الأخطاء المعيارية ويختبر باحثو الإقتصاد القياسي التطبيقي فرضية العدم $H_0 : \beta_j = 0$ لكل معلمة ضد الفرضية البديلة $H_A : \beta_j \neq 0$ وذلك عند مستوى معنوية معين. ونكتب الأخطاء المعيارية $\left(SE(\hat{\beta}_j) = \sqrt{\hat{\text{var}}(\hat{\beta}_j)} \right)$، عادة، بين قوسين من القيم العددية لتلك المقدرات. فإذا كانت $(SE(\hat{\beta}_j) \succ (1/2)\hat{\beta}_j)$ نقبل فرضية العدم. ومنه تكون (β_j) غير مقبولة إحصائيا. أما إذا كانت $(SE(\hat{\beta}_j) \prec (1/2)\hat{\beta}_j)$ نرفض فرضية العدم (H_0)، ونقبل الفرضية البديلة القائلة بأن

[1] عز الدين مالك الطيب محمد، المدخل الى الإقتصاد القياسي، الجزء الاول، نموذج المعادلة الواحدة ومشاكل القياس، مطبعة تاون الخرطوم 2008، ص 78

معنوية (β_j) مقبولة إحصائيا. وعلى العموم، كلما كانت الأخطاء المعيارة صغيرة كلما كانت المعنوية الإحصائية للمعالم جيدة. أما إختبارات المعنوية بالنسبة للتوزيع (t) فتحسب من القانون:

$$\left((\hat{\beta}_j - \beta_j)/SE(\hat{\beta}_j)\right) = t_{n-k} \rightarrow t_{(n-k),(\lambda/2)} : j = 1;2;3 \ldots\ldots (3.24)$$

وكلما كانت قيمة $(t_{(n-k)})$ (المحسوبة) أكبر، كلما أصبحت قيمة المعلمة (β_j) مقبولة إحصائيا أكثر.

VI. توسيع نموذج الإنحدار ذو متغيرين مستقلين إلى (K) متغير مستقل.

- نقوم بتوسيع نموذج الإنحدار (3.1) إلى نموذج يحتوي على (K) متغير مستقل (حيث $K \succ 2$) مستعملين طريقة المربعات الصغرى العادية. ومنه نبحث عن المعادلات الطبيعية، ثم نطبق قاعدة كرامر للحصول على قانون التباين.

1. إشتقاق المعادلات الطبيعية

نمدد النموذج (3.1) إلى نموذج إنحدار يحتوى على (K) متغير مستقل

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \ldots\ldots + \beta_k X_{ki} + u_i \ldots\ldots (3.25)$$

وتحتوي المعادلات الطبيعية على $(K+1)$ معادلة طبيعية و (K) متغير مستقل. حيث تكون المعالم غير المعروفة هي $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots\ldots \beta_k)$. بينما تكون القيم المعروفة هي مجموع مربعات القيم المستقلة والتابعة والمجاميع الوسيطة فيما بينها. ولإشتقاق $(K+1)$ معادلة بدون إستعمال قانون الإشتقاق الجزئي، تكتب معادلة العلاقة المقدرة على الشكل:

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \ldots\ldots + \hat{\beta}_k X_{ki} + \hat{u}_i \ldots\ldots (3.26)$$

ومن (3.10) لدينا $\Sigma\hat{u}_i = 0, \Sigma\hat{u}_i X_{ji} = 0, j = 1,2,3 \ldots\ldots k$

وبتعميم الفكرة نقول بأن معادلة العلاقة التقديرية للنموذج (3.1) هي:

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \hat{u}_i \ldots\ldots (3.27)$$

وبإدخال الجمع بالنسبة لكل (i) نحصل على المادلة الطبيعية الأولى:

$$\Sigma Y_i = n\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \Sigma X_{2i} + \hat{\beta}_3 \Sigma X_{3i} \ldots\ldots (3.28)$$

وبضرب المعادلة (3.27) بالمتغير (X_{2i}) ثم بالمتغير (X_{3i}) وجمعها على التوالي:

$$\Sigma Y_i X_{2i} = \hat{\beta}_1 \Sigma X_{2i} + \hat{\beta}_2 \Sigma X_{2i}^2 + \hat{\beta}_3 \Sigma X_{3i} X_{2i} \ldots\ldots (3.29)$$

$$\Sigma Y_i X_{3i} = \hat{\beta}_1 \Sigma X_{3i} + \hat{\beta}_2 \Sigma X_{2i} X_{3i} + \hat{\beta}_3 \Sigma X_{3i}^2 \ldots\ldots (3.30)$$

إذن تكون المعادلة (3.28)، (3.29)، (3.30) المعادلات الطبيعية للمربعات الصغرى للنموذج (3.1)

أما بالنسبة للنموذج (3.25) فسنقوم بضرب المعادلة (3.26) بالمتغيرات المستقلة (X_{ji}) $(j = 1,2,3,\ldots\ldots k)$ لنجد:

$$Y_i X_{ji} = \hat{\beta}_1 X_{ji} + \hat{\beta}_2 X_{2i} X_{ji} + \hat{\beta}_3 X_{3i} X_{ji} + \ldots\ldots + \hat{\beta}_k X_{ki} X_{ji} + \hat{u}_i X_{ji} \ldots\ldots (3.31)$$

ولنإخذ المعادلة الطبيعية الأخيرة $(j = k)$ من (3.31) ونجمعها بالنسبة لكل (i) فتصبح:

$$\Sigma Y_i X_{ki} = \hat{\beta}_1 \Sigma X_{ki} + \hat{\beta}_2 \Sigma X_{2i} X_{ki} + \hat{\beta}_3 \Sigma X_{3i} X_{ki} + \ldots\ldots + \hat{\beta}_k \Sigma X_{ki}^2 \ldots\ldots (3.32)$$

حيث أن $(\Sigma\hat{u}_i X_{ki} = 0)$

محاضرات في نمذجة الظواهر الاقتصادية

وإذا أخذنا الإنحرافات تكون معادلة العلاقة التقديرية هي:[1]

$$y_i = \hat{\beta}_2 x_{2i} + \hat{\beta}_3 x_{3i} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \hat{\beta}_k x_{ki} + \hat{u}_i \quad \ldots\ldots(3.33)$$

أما المعادلة الطبيعية الأخيرة فتكون:

$$\Sigma y_i x_{ki} = \hat{\beta}_2 \Sigma x_{2i} x_{ki} + \hat{\beta}_3 \Sigma x_{3i} x_{ki} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \hat{\beta}_k \Sigma x_{ki}^2 \quad \ldots\ldots(3.34)$$

2. تعميم القانون بالنسبة لمعامل التحديد المضاعف (R^2):

- لحساب قيمة (R^2): كمقياس لجودة التوفيق في نموذج الإنحدار المحتوي على (K) متغير مستقل، يمكن إتباع نفس الطريقة المستعملة في الفصل الثاني لنصل إلى: $TSS = RSS + ESS$. ويمكن تطويره كما يلي:

* في النموذج (2.1)

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

لدينا: $$R_{Y,X} = \Sigma\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2 / \Sigma\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 = \hat{\beta}\Sigma x_i y_i / \Sigma y_i^2$$

- في النموذج (3.1) $$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$$

لدينا : $$R_{Y,X_2,X_3} = \left(\hat{\beta}_2 \Sigma x_{2i} y_i + \hat{\beta}_3 \Sigma x_{3i} y_i\right) / \Sigma y_i^2$$

في النموذج (3.25) $$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \ldots\ldots\ldots + \beta_k X_{ki} + u_i$$

لدينا :

$$R_{Y,X_2,X_3\ldots\ldots X_k} = \left(\hat{\beta}_2 \Sigma x_{2i} y_i + \hat{\beta}_3 \Sigma x_{3i} y_i + \ldots\ldots\ldots \hat{\beta}_k \Sigma x_{ki} y_i\right) / \Sigma y_i^2 \quad \ldots\ldots(3.35)$$

إذن نلاحظ دائما بأن (R^2) يقيس نسبة التغير في (Y) والتي تكون مشروحة (موضحة) بواسطة معادلة خط الإنحدار. وهناك مجموعة من المشاكل نواجهها مع إستعمال (R^2).

- ✓ كل نتائجها الإحصائية تأتي من فرضيتنا القائلة بأن نموذجنا المبني في (3.25) يكون صحيحا، ثم ليس لدينا طريقة أو قيمة إحصائية بديلة للمقارنة بها.
- ✓ إن (R^2) حساس لعدد المتغيرات المستقلة الموجودة في نموذج الإنحدار. حيث أن إضافة متغيرات مستقلة أخرى لمعادلة الإنحدار لا يمكن أبدا أن تنقص من قيمة (R^2). وبالعكس فإنها يمكن أن تزيد من قيمته (لأن إضافة متغير مستقل جديد للنموذج (3.25) لا يؤثر في TSS ولكن يزيد في قيمة RSS) وبالتالي فإن تعظيم (R^2) يكون بواسطة زيادة متغيرات مستقلة إلى النموذج الأصلي. ويصبح تفسير وإستعمال ل (R^2) صعبا عندما يكون النموذج بدون الحد الثابت، حيث ليس بالضرورة أن يكون RSS/TSS محصورا ما بين الصفر والواحد في هذه الحالة. إن الصعوبة مع (R^2) كمقياس لوجود التوفيق هو أنه يرتبط بالتغيرات الحاصلة في المتغير التابع (Y) (أي التغيرات الموضحة وغير الموضحة في (Y)). وبالتالي، لا يأخذ عدد درجات الجزء بالحسبان في أي مشكل إحصائي. ويمكن إظهار ذلك كما يلي:

عندما يحتوي النموذج على (K) متغير مستقل فإن:

[1] عزالدين مالك الطيب محمد، المدخل الى الإقتصاد القياسي مرجع سابق ص 66

$$ESS_k = \Sigma\left(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i} - \ldots\ldots\ldots\ldots - \hat{\beta}_k X_{ki}\right)^2$$

$$\hat{\beta}_1 = \left(\overline{Y} - \hat{\beta}_2 \overline{X}_2 - \hat{\beta}_3 \overline{X}_3 - \ldots\ldots\ldots\ldots - \hat{\beta}_k \overline{X}_k\right)^2$$ ومع العلم أن: .....

لتصبح.....

$$ESS_k = \Sigma\left(\left(Y_i - \overline{Y}\right) - \hat{\beta}_2\left(X_{2i} - \overline{X}_2\right) - \hat{\beta}_3\left(X_{3i} - \overline{X}_3\right) \ldots\ldots\ldots\ldots - \hat{\beta}_k\left(X_{ki} - \overline{X}_k\right)\right)^2$$

$$ESS_k = \Sigma\left(y_i - \hat{\beta}_2 x_{2i} - \hat{\beta}_3 x_{3i} - \ldots\ldots\ldots\ldots - \hat{\beta}_k x_{ki}\right)^2$$

$$ESS_k = \Sigma y_i^2 - \hat{\beta}_2^2 \Sigma x_{2i}^2 - \hat{\beta}_3^2 \Sigma x_{3i}^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots - \hat{\beta}_k^2 \Sigma x_{ki}^2$$

$$ESS_k = \Sigma y_i^2 - \hat{\beta}_2 \Sigma x_{2i} y_i - \hat{\beta}_3^2 \Sigma x_{3i} y_i - \ldots\ldots\ldots\ldots - \hat{\beta}_k \Sigma x_{ki} y_i \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3.36)$$

إذن بالنسبة لنموذج إنحدار يحتوي على (k + 1) متغير مستقل تصبح:

$$ESS_k = \Sigma y_i^2 - \hat{\beta}_2 \Sigma x_{2i} y_i - \hat{\beta}_3^2 \Sigma x_{3i} y_i - \ldots\ldots\ldots\ldots - \hat{\beta}_k \Sigma x_{ki} y_i - \beta_{(k+1)} \Sigma x_{(k+1)} y_i$$

ويصبح الفرق ما بين $ESS_{(k+1)}$ و ESS_k كما يلي:

$$ESS_{(k+1)} = ESS_k - \hat{\beta}_{(k+1)} \Sigma x_{(k+1)i} y_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.37)$$

ليكون الفرق سالبا كما هو مبين أدناه:

$$ESS_{(k+1)} - ESS_k = -\hat{\beta}_{(k+1)} \Sigma x_{(k+1)i} y_i = -\hat{\beta}_{(k+1)}^2 \Sigma x_{(k+1)i}^2 \leq 0$$

ومنه نستنتج أن: $ESS_{(k+1)} \leq ESS_k$

ونقول كلما زاد عدد المتغيرات المستقلة في النموذج كلما قلت قيمة مجموع مربعات البواقي (Ess) ويصبح معامل التحديد كما يلي:

* بالنسبة ل (K) متغير مستقل: $R_k^2 = 1 - \left(ESS_k / TSS\right)$ .....

* بالنسبة ل $(K+1)$ متغير مستقل: $R_{(k+1)}^2 = 1 - \left(ESS_{(k+1)} / TSS\right)$ .....

ويكون الفرق بين $\left(R_k^2\right)$ و $\left(R_{(k+1)}^2\right)$ كما يلي:.....

$$R_k^2 - R_{(k+1)}^2 = \left[1 - \left(ESS_k / TSS\right)\right] - \left[1 - \left(ESS_{(k+1)} / TSS\right)\right]$$

$$= \left(1/TSS\right)\left[ESS_{(k+1)} - ESS_k\right] \leq 0$$

وهذا يستلزم أن:..... $R_{(k+1)}^2 \geq R_k^2$

- ونخلص إلى أنه كلما أضفنا متغيرات مستقلة لنموذج الانحدار، كلما ارتفعت قيمة (R^2). إذن ظهرت عيوب معامل التحديد (R^2) بأنه لا يأخذ بعين الاعتبار درجات الحرية ويعتمد على عدد المتغيرات الموجودة في النموذج وذلك لأنه يعتمد على الانحرافات أو التغيرات (*variations*) في (Y). ولتفادي ذلك نأخذ بعين الاعتبار التباينات (*variances*) عوضا عن الانحرافات في حساب (R^2) حيث أن التباين هو عبارة عن التغير مقسوم على درجات الحرية.

3. معامل التحديد المصحح $(\overline{R}^2)$

يجب ملاحظة أن إضافة متغيرات مستقلة للنموذج لا يمكن أن يقلل من قيمة (R^2) وعادة ما تزداد قيمته. لأن إضافة متغير مستقل جديد يزيد من قيمة البسط في المعادلة (3.35). بينما يبقى المقام على حاله. ولتصحيح ذلك تعدل (R^2) آخذين بعين الإعتبار درجات الحرية (والتي يقل عددها بإضافة متغيرات مستقلة جديدة) ونعرف $(\overline{R}^2)$ كما يلي: $\overline{R}^2 = 1 - \text{var}(\hat{u}_i)/\text{var}(Y_i)$ ..... (3.38)

$\text{var}(\hat{u}_i) = \hat{\sigma}_u^2 = \Sigma\hat{u}_i^2/(n-k) \Rightarrow \Sigma\hat{u}_i^2 = ESS = \hat{\sigma}_u^2(n-k)$: حيث أن

$\text{var}(Y_i) = \Sigma(Y_i - \overline{Y})^2/(n-k) \Rightarrow \Sigma(Y_i - \overline{Y})^2 \Sigma y_i^2 = TSS = \text{var}(Y_i)(n-1)$

حيث (k) في $\text{var}(\hat{u}_i)$ هو عدد المتغيرات المستقلة أو عدد المتغيرات الموضحة. وبالرغم من أن (ESS) سوف ينقص بزيادة متغيرات مستقلة للنموذج فإن $\text{var}(\hat{u}_i)$ لا يحتاج لأن ينقص. حيث نلاحظ أن كلا من البسط والمقام في التعريف $\text{var}(\hat{u}_i) = ESS/(n-k)$ يتغيران عندما نضيف متغيرا مستقلا آخر للنموذج.

ومن تعريف (R^2) في الفصل الثاني نجد:[1]

$$R^2 = 1 - (ESS_k/TSS) = 1 - \hat{\sigma}_u^2(n-k)/[\text{var}(Y_i)(n-1)]$$

$$R^2 = 1 - [\hat{\sigma}_u^2/\text{var}(Y_i)][(n-k)/(n-1)]$$

$$1 - R_k^2 = (ESS/TSS) = [\hat{\sigma}_u^2/\text{var}(Y_i)][(n-k)/(n-1)]$$

$$1 - \overline{R}^2 = \text{var}(\hat{u}_i)/\text{var}(Y_i) = [\hat{\sigma}_u^2/\text{var}(Y_i)] \quad \text{.....(3.38)}$$ كما أن من

$$1 - R_k^2 = (1 - \overline{R}^2)\ [(n-k)/(n-1)]$$ إذن تصبح: .....

$$(\overline{R}^2) = 1 - (1 - R_k^2)[(n-k)/(n-1)] \quad \text{.....(3.39)}$$ ومنه نستنتج:

(1) ملاحظة: نقسم (TSS) على $(n-1)$ عند حساب $\text{var}(\hat{u}_i)$ لأن درجة حرية واحدة إشتملت في حساب الوسط الحسابي ل (Y). ونقسم على $(n-k)$ في حساب $\text{var}(\hat{u}_i)$ لأن (k) معلمة يجب أن تقدر في النموذج قبل أن تقدر $(\hat{u}_i)$ ولهذا تفقد (k) درجات الحرية من حجم العينة (n).

ومن المعادلة (3.39) تظهر العلاقة بين (R^2) و $(\overline{R}^2)$.

a) إذا كانت $(k=1)$ فإن $(\overline{R}^2) = (R^2)$

b) إذا كانت $(k \geq 1)$ فإن $(\overline{R}^2) \leq (R^2)$

c) يمكن أن نأخذ $(\overline{R}^2)$ قيما سالبة

- إذا كان حجم العينة (n) كبيرا فإن (R^2) و $(\overline{R}^2)$ يقتربان في قيمتهما. ولكن عند العينات الصغيرة. إذا كان عدد المتغيرات المستقلة كبيرا بالمقارنة مع حجم العينة فإذا $(\overline{R}^2)$ أقل بكثير من (R^2) ويمكن أن يأخذ قيما سالبة في هذه الحالة. وبالتالي يجب شرحه على

- إذن $(\overline{R}^2)$ له مجموعة من الخصائص تجعله وسيلة قياس لجودة التوفيق أفضل من (R^2). عندما نضيف متغيرات جديدة فنموذج (R^2) دائما يزيد بينما $(\overline{R}^2)$ يزيد أو ينقص. إن إستعمال $(\overline{R}^2)$ على الأقل يقضي على تساؤلات بعض الباحثين حول أهمية زيادة عدد من المتغيرات للنموذج بدون التفكير في سبب ظهور هذه المتغيرات. على كل حال لا يجب أن نعتبر $(\overline{R}^2)$ يحل كل المشاكل المتعلقة ب (R^2) كمقياس لجودة التوفيق. إن القرار حول إمكانية ظهور بعض المتغيرات في النموذج تبقى معتمدة على اعتبارات نظرية أخرى في الإقتصاد القياسي كما أن القيمة العددية ل $(\overline{R}^2)$ تكون حساسة لنوع المعطيات المستعملة.

[1] صالح تومي، مدخل لنظرية القياس الاقتصادي مرجع سابق ص123

4. تعميم قانون التباين لمقدرات المعالم

- إذا أردنا تعميم فكرة الحصول على تباينات مقدرات المعالم نلاحظ في نموذج الإنحدار الخطي البسيط أن $\text{var}(\hat{\beta}) = \sigma_u^2 / \Sigma x_i^2$ أما بالنسبة لنموذج ذو متغيرين مستقلين (نموذج (3.1)) فنكتب المعادلات الطبيعية فيشكلها الإنحرافي كما يلي:

$$\Sigma x_{2i} y_i = \hat{\beta}_2 \Sigma x_{2i}^2 + \hat{\beta}_3 x_{2ii} x_{3i}$$

$$\Sigma x_{3i} y_i = \hat{\beta}_2 \Sigma x_{2i} x_{3i} + \hat{\beta}_3 x_{3i}^2$$

ويمكن كتابة القيم المعروفة في الطرف الأيمن على الشكل:

$$\begin{bmatrix} \Sigma x_{2i}^2 & \Sigma x_{2i} x_{3i} \\ \Sigma x_{2i} x_{3i} & \Sigma x_{3i}^2 \end{bmatrix} = A \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} \Sigma x_{2i}^2 & \Sigma x_{2i} x_{3i} \\ \Sigma x_{2i} x_{3i} & \Sigma x_{3i}^2 \end{vmatrix}$$

ومن ثم فتباين كل مقدر هو حاصل ضرب (σ_u^2) (تباين الأخطاء) بالجزء الأساسي للمحدد $|A|$ (إذن الجزء الأساسي للمحدد $|A|$ هو ذلك الجزء الباقي بعد حذف السطر والعمود المناسبين للمعلمة المطلوب إيجاد تباينها). ثم نقسم نتيجة الضرب على المحدد $|A|$ أي:[1]

$$\text{var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma_u^2 \begin{bmatrix} \Sigma x_{2i}^2 & \Sigma x_{2i} x_{3i} \\ \Sigma x_{2i} x_{3i} & \Sigma x_{3i}^2 \end{bmatrix}}{|A|} = \sigma_u^2 \Sigma x_{3i}^2 / |A| = \frac{\sigma_u^2 \Sigma x_{3i}^2}{\Sigma x_{2i}^2 \Sigma x_{3i}^2 - (\Sigma x_{2i} x_{3i})^2} = \sigma_u^2 / [\Sigma x_{2i}^2 (1 - R^2)]$$

$$\text{var}(\hat{\beta}_3) = \frac{\sigma_u^2 \begin{bmatrix} \Sigma x_{2i}^2 & \Sigma x_{2i} x_{3i} \\ \Sigma x_{2i} x_{3i} & \Sigma x_{3i}^2 \end{bmatrix}}{|A|} = \sigma_u^2 \Sigma x_{2i}^2 / |A| = \frac{\sigma_u^2 \Sigma x_{2i}^2}{\Sigma x_{2i}^2 \Sigma x_{3i}^2 - (\Sigma x_{2i} x_{3i})^2} = \sigma_u^2 / [\Sigma x_{3i}^2 (1 - R^2)]$$

اما اذا كان لدينا ثلاثة متغيرات مستقلة .....

$$Y_i = \beta_1 + \beta_1 X_2 + \beta_2 X_3 + \beta_3 X_4 + u_i$$

فبعد الحصول على المعادلات الطبيعية يكون المحدد $|B|$ على الشكل :

$$|B| = \begin{vmatrix} \Sigma x_{2i}^2 & \Sigma x_{2i} x_{3i} & \Sigma x_{2i} x_{4i} \\ \Sigma x_{2i} x_{3i} & \Sigma x_{3i}^2 & \Sigma x_{3i} x_{4i} \\ \Sigma x_{2i} x_{4i} & \Sigma x_{3i} x_{4i} & \Sigma x_{4i}^2 \end{vmatrix}$$

وتصبح التباينات :

$$\text{var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma x_{2i}^2 & \Sigma x_{2i} x_{3i} & \Sigma x_{2i} x_{4i} \\ \Sigma x_{2i} x_{3i} & \Sigma x_{3i}^2 & \Sigma x_{3i} x_{4i} \\ \Sigma x_{2i} x_{4i} & \Sigma x_{3i} x_{4i} & \Sigma x_{4i}^2 \end{vmatrix}}{|B|} = \sigma_u^2 \frac{\begin{vmatrix} \Sigma x_{3i}^2 & \Sigma x_{3i} x_{4i} \\ \Sigma x_{3i} x_{4i} & \Sigma x_{4i}^2 \end{vmatrix}}{|B|}$$

$$\text{var}(\hat{\beta}_3) = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma x_{2i}^2 & \Sigma x_{2i} x_{3i} & \Sigma x_{2i} x_{4i} \\ \Sigma x_{2i} x_{3i} & \Sigma x_{3i}^2 & \Sigma x_{3i} x_{4i} \\ \Sigma x_{2i} x_{4i} & \Sigma x_{3i} x_{4i} & \Sigma x_{4i}^2 \end{vmatrix}}{|B|} = \sigma_u^2 \frac{\begin{vmatrix} \Sigma x_{2i}^2 & \Sigma x_{2i} x_{4i} \\ \Sigma x_{2i} x_{4i} & \Sigma x_{4i}^2 \end{vmatrix}}{|B|}$$

[1] مولود حشمان، نماذج وتقنيات التنبؤ على المدى القصير OPU، الجزائر؛ 2002، ص58

$$\text{var}(\hat{\beta}_4)=\frac{\begin{vmatrix}\Sigma x_{2i}^2 & \Sigma x_{2i}x_{3i} & \Sigma x_{2i}x_{4i}\\ \Sigma x_{2i}x_{3i} & \Sigma x_{3i}^2 & \Sigma x_{3i}x_{4i}\\ \Sigma x_{2i}x_{4i} & \Sigma x_{3i}x_{4i} & \Sigma x_{4i}^2\end{vmatrix}}{|B|}=\sigma_u^2\frac{\begin{vmatrix}\Sigma x_{2i}^2 & \Sigma x_{2i}x_{3i}\\ \Sigma x_{2i}x_{3i} & \Sigma x_{3i}^2\end{vmatrix}}{|B|}$$

ويمكن تمديد هده الفكرة في النمودج (3. 25) لتصبح :

$$\text{var}(\hat{\beta}_k)=\frac{\begin{vmatrix}\Sigma x_{2i}^2 & \Sigma x_{2i}x_{3i} & \dots & \Sigma x_{2i}x_{ki}\\ \Sigma x_{2i}x_{3i} & \Sigma x_{3i}^2 & \dots & \Sigma x_{3i}x_{ki}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \Sigma x_{2i}x_{ki} & \Sigma x_{3i}x_{ki} & \dots & \Sigma x_{ki}^2\end{vmatrix}}{|C|}$$

حيث ان $|C|$ هي محدد القيمة الموجودة في البسط قبل ان نحذف منها السطر والعمود الاخيرين

VII. إختبارات التوزيع "F"

يستعمل التوزيع الإحصائي "F" في النموذج الإنحدار الخطي الموسع لإختبار معنوية المقياس الإحصائي (R^2) . بحيث أن "F" ب $(n-1)$ و $(n-k)$ درجات حرية يسمح لنا بإختبار صحة الفرضية القائلة بأنه لا يوجد أي متغير مستقل يشرح التغير في (Y) حول وسطها الحسابي $(\overline{Y})$ بمعنى آخر تختبر "F" الفرضية المهمة القائلة:

$$H_0 : \beta_2=\beta_3=.....=\beta_k=0$$
$$H_A : \beta_j\neq 0 : j=2,3,.....k$$

فإذا كان لدينا متغيرين W_2, W_1 مستقلين عن بعضهما البعض ولهما توزيعين χ_q^2, χ_p^2 على الترتيب فإن:

$$\varphi=\frac{W_1/p}{W_2/q}=\frac{W_1}{W_2}.\frac{q}{p}\rightarrow F(p,q) \quad \text{.....} \quad (3.40)$$

- وتحت Ho صحيحة لدينا: $\beta_j=0\Rightarrow \Sigma\hat{u}_i^2=ESS_R : j=2,3,.....,k$ .....

ملاحظة: حيث أن (ESS_R) تشير إلى مجموع مربعات البواقي المقيدة. بينما (ESS_{UR}) تشير إلى مجموع مربعات البواقي غير المقيدة.

ومع التوزيع الطبيعي للأخطاء $u_i\rightarrow N(0,\sigma_u^2)$ نجد: [1]

1) تحت (H_0) صحيحة: $ESS_R/\sigma_u^2=\Sigma\hat{u}_i^2/\left[(n-1)\sigma_u^2\right]\rightarrow\chi_{(n-1)}^2$ .....

2) تحت (H_A) صحيحة: $ESS_{UR}/\sigma_u^2=\Sigma\hat{u}_i^2/\left[(n-k)\sigma_u^2\right]\rightarrow\chi_{(n-k)}^2$ ....

- وينتج لدينا كذلك: .....

$$\frac{ESS_R}{\sigma_u^2}-\frac{ESS_{UR}}{\sigma_u^2}=\frac{ESS_R-ESS_{UR}}{\sigma_u^2}=\chi_{(n-1)}^2-\chi_{(n-k)}^2=\chi_{(n-1)}^2$$

[1] مولود حشمان، نماذج وتقنيات التنبؤ على المدى القصير OPU، الجزائر؛ 2002، ص62

ونلاحظ أن $(\chi_{(k-1)})$ هو توزيع مستقل عن $(\chi^2_{(n-k)})$ ثم حسب التعريف (3.40) لقانون التوزيع " F "يصبح لدينا:

$$\phi = \left[\frac{(ESS_R - ESS_{UR})/\sigma_u^2}{(k-1)}\right] \Big/ \left[\frac{ESS_{UR}/\sigma_u^2}{(n-k)}\right] = \left[\frac{ESS_R - ESS_{UR}}{ESS_{UR}}\right]\left[\frac{(n-k)}{(k-1)}\right] \rightarrow F_{(k-1),(n-k)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.41)$$

لكن لدينا: $R_R^2 = 1 - ESS_R/TSS \Rightarrow ESS_R = (1-R_R^2)TSS$ .....

$$R_{UR}^2 = 1 - ESS_{UR}/TSS \Rightarrow ESS_{UR} = (1-R_{UR}^2)TSS$$

نعوض هذه القيم في العبارة (3.41) لنجد:

$$\phi = \left[\frac{R_{UR}^2 - R_R^2}{1-R_{UR}^2}\right]\left[\frac{(n-k)}{(k-1)}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.42)$$

فمثلا في النموذج (3.1) إذا أردنا إختبار: $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_k = 0$ .....

$H_A : \beta_j \neq 0 : j = 2,3$

- فتحت (H_0) صحيحة نجد: $Y_i = \beta_1 + u_i$ وهذا معناه أن $R_R^2 = 0$

- وتحت (H_A) صحيحة: $R^2 = R_R^2$

ويكون الإختبار: $\phi = \left[\frac{R^2}{1-R^2}\right]\left[\frac{(n-k)}{(k-1)}\right] = \left[\frac{R^2}{1-R^2}\right]\left[\frac{(n-3)}{(2)}\right] \rightarrow F_{(2,n-3)}$ .....

ومنه يمكن تعميم القانون بالنسبة للإختبارات المعنوية الكلية كما يلي:

$$\phi = \left[\frac{R^2}{1-R^2}\right]\left[\frac{(n-k)}{(k-1)}\right] \rightarrow F_{(n-1,n-k)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.43)$$

على العموم إذا كانت (ϕ) (المحسوبة) أكبر من (F) (المجدولة) بمستوى معنوية محدد، نرفض (H_0) والعكس بالعكس. إي إذا كانت (H_A) صحيحة فإن (R^2) ، (F) يكون أقرب إلى الصفر.

VIII. الإرتباط الجزئي.

في نموذج الإنحدار الموسع، نقوم بتثبيت كل المتغيرات المستقلة ماعدا المتغير المستقل المرتبط بالمعلمة التي نريد تقديرها. وللقيام بذلك نكتب النموذج كما في الشكل (3.1). إن معامل الإرتباط الجزئي بين (Y) و (X_2) يجب أن يعرف بطريقة تجعله يقيس أثر (X_2) في (Y) . أي أن معامل الإرتباط الجزئي يحسب بواسطة القضاء على الأثر الخطي ل (X_3) في (Y) (وكذلك أثر (X_3) في (X_2) ومن ثم إجراء الإنحدار وفقا للخطوات التالية:

1) حدر (Y) في (X_3) لتحصل على القيم التقديرية: $\hat{Y}_i = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 X_{3i}$ .....

2) حدر (X_2) في (X_3) " " " " $\hat{X}_{2i} = \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 X_{3i}$ .....

3) حول تأثير (X_3) في كل من (Y) و (X_2) كما يلي: $Y_i^* = Y_i - \hat{Y}_i, X_{2i}^* = X_{2i} - \hat{X}_{2i}$ .....

4) الإرتباط الجزئي بين (X_2) و (Y) يصبح عبارة عن الإرتباط البسيط (العادي) بين Y_i^* و X_{2i}^*

لكي نعرف لماذا إنحدار Y_i^* في X_{2i}^* يعطي لنا معامل الإرتباط الجزئي المرغوب، لاحظ أن Y_i^* و X_{2i}^* كلاهما غير مرتبط مع (X_3) (لأن Y_i^* تمثل البواقي الناتجة عن إنحدار (Y) في (X_3)) كما نعرف من قبل فإن البواقي دائما غير مرتبطة مع المتغيرات المستقلة (الموضحة)

ونعرف القيم التالية:

- $R_{YX_2.X_3}$ = الإرتباط الجزئي ما بين (Y) و (X_2) (مع تثبيت (X_3))
- $R_{YX_3.X_2}$ = الإرتباط الجزئي ما بين (Y) و (X_3) (مع تثبيت (X_2))
- $R_{X_2X_3.Y}$ = الإرتباط الجزئي ما بين (X_2) و (X_3) (مع تثبيت (Y))

ومنه فإن العلاقة بين الإرتباط الجزئي والإرتباط البسيط (العادي)يعطى كما يلي:

$$R_{YX_2.X_3} = \frac{R_{YX_2} - R_{YX_3}.R_{X_2.X_3}}{\sqrt{1-R_{X_2X_3}^2}\sqrt{1-R_{YX_3}^2}} \quad \text{.....} \quad (3.44)$$

$$R_{YX_3.X_2} = \frac{R_{YX_3} - R_{YX_2}.R_{X_2.X_3}}{\sqrt{1-R_{X_2X_3}^2}\sqrt{1-R_{YX_2}^2}} \quad \text{.....} \quad (3.45)$$

هناك مجموعة من الملاحظات تؤخذ حول معاملات الإرتباط الجزئية مباشرة في المعادلتين (3.44) و (3.45).

- أولا: الإرتباطات الجزئية يجب أن تكون في مجال من $[-1 \le R \le +1]$
- ثانيا: إن الإرتباط الجزئي بين (Y) و (X_2) المساوي للصفر، مثلا، يعني أنه لا توجد أية علاقة خطية بين (Y) و (X_2) أو أن (X_2) ليس لها أثر مباشر على (Y) في النموذج. نستعمل معاملات الإرتباط الجزئية لتحديد نسبة أهمية المتغيرات المختلفة في نموذج الإنحدار الموسع.

إذا كانت (X_{2i}) و (X_{3i}) غير مرتبطتين، $(R_{X_2.X_3} = 0)$ وكذلك (X_{3i}) و (Y_i) غير مرتبطتين $(R_{Y_2.X_3} = 0)$ فإن الإرتباط الجزئي بين (X_2) و (Y) ينخفض إلى إرتباط عادي بين متغيرين. أما إذا كانت (X_{2i}) و (X_{3i}) مرتبطتين تماما $(R_{X_2.X_3} = 1)$ فإن الإرتباط الجزئي لا يمكن تحديده. لإيجاد العلاقة بين الإرتباط الجزئي و (R^2) (معامل التحديد) نقول أنه في نموذج ذو متغيرين لا يصعب علينا شرح (R^2) بأنه مربع الإرتباط العادي في المتغير التابع (Y) والمتغير المستقل (X).

ويمكن كتابة العلاقة بين الإرتباط الجزئي والإرتباط المتعدد (المضاعف) كما يلي:

$$R^2{}_{YX_2.X_3} = \left(R^2 - R_{Y,X_3}^2\right)/\left(1-R_{Y,X_3}^2\right) \quad \text{.....} \quad (3.46)$$

أو على الشكل: $\left(1-R^2\right) = \left(1-R_{Y,X_3}^2\right)/\left(1-R_{YX_2,X_3}^2\right)$ .....

إن الإرتباط الجزئي من كل متغير مستقل والمتغير التابع كبير الأهمية لتحديد أي متغير يجب أن تضيف لأنه يخبرنا عما إذا كان هذا المتغير المضاعف يؤثر على المتغير التابع بعد حذف كل المتغيرات الأخرى الموجودة في النموذج.

سلسلة تمارين 3 .

1) يبين الجدول التالي قيم الإنفاق على الملابس (y)، الإنفاق الكلي (x_2) وسعر الملابس (x_3).

السنوات	1960	61	62	63	64	65	66	67	68	69
(X_3)	16	13	10	7	7	5	4	3	3.5	2
(X_2)	15	20	30	42	50	54	65	72	85	90
(Y)	3.5	4.3	5	6	7	9	8	10	12	14

a) أوجد مقدرات المربعات الصغرى لإنحدار (Y) في (X_2) و (X_3)

b) أحسب معامل التحديد المضاعف والأخطاء المعيارية لمقدرات المعالم وكون إختبارات المعنوية

c) كون 95% مجالات ثقة لمعالم المجتمع.

d) أوجد التغيرات المشروحة وغير المشروحة في (Y).

2) ليكن النموذج التالي: ..... $Y_i = \beta_1 + \beta_1 X_{2i} + \beta_2 X_{3i} + u_i$

a) بين أن مقدرات المربعات الصغرى $(\hat{\beta}_3, \hat{\beta}_2)$ هي مقدرات غير متحيزة

b) أثبت أن ..... $\Sigma \hat{u}_i x_{2i} = \Sigma \hat{u}_i x_{3i} = 0$

c) أثبت أن ..... $\overline{R}^2 = 1 - \left[\Sigma \hat{u}_i^2/(n-k)\right]\left[\Sigma y_i^2/(n-1)\right]$

3) لديك النموذجين التاليين:

$1) \ldots\ldots Y_i = \beta_1 + \beta_1 X_{2i} + \beta_2 X_{3i} + u_i$

$2) \ldots\ldots (Y_i - X_{2i}) = \beta_1' + \beta_1' X_{2i} + \beta_2' X_{3i} + u_i'$

a) أثبت أن ..... $\hat{\beta}_3' = \hat{\beta}_3 \, ، \hat{\beta}_1' = \hat{\beta}_1 \, ، \hat{\beta}_2' = \hat{\beta}_2 - 1$

b) أثبت أن بواقي المربعات الصغرى في النموذجين متماثلة.

c) تحت أية ظروف يكون (R^2) المحصل عليه من النموذج (2) أصغر من (R^2) المحصل عليه من النموذج (1)؟

4) a) إشرح وقيم الدوال المقدرة التالية :

- على أساس المعلومات التي تعرفها من النظرية الاقتصادية
- على أساس النتائج الإحصائية التي تعرفها لحد الآن.

1) مقدر دالة الطلب على السيارات المنتجة محليا:

$$\hat{D}_t = 1584 - 12P_{1t} + 18P_{2t} + 0{,}6Y_t$$
$$\ldots\ldots\ldots(320)\ldots(3)\ldots\ldots(2)\ldots\ldots\ldots(0{,}1)$$

حيث أن: D_t = الطلب على السيارات المنتجة محليا

P_{1t} = سعر السيارات المنتجة محليا

P_{2t} = سعر السيارات المستوردة

Y_t = الدخل المتاح

2) مقدر دالة الادخار.

$$\hat{S}_t = -5 + 0{,}2Y_t$$
$$\ldots\ldots(500)\ldots(0{,}02)$$

- قدر الميلين الحديين للاستهلاك والادخار؟
- قدر مستوى الادخار بعد (10) سنوات إذا عرفت أن الدخل سيصبح $Y_t = 200.000$

b) قدر الطلب على السيارات المنتجة محليا إذا علمت أن:

$$P_{1t} = 3000 \text{ ، } P_{2t} = 2500 \text{ ، } Y_t = 250.000$$

c) قدر متوسط مرونة السعر، ومرونة الدخل. إذا علمت أن:

$$D = 60.000 \text{ ، } P_1 = 4000 \text{ ، } P_2 = 3000 \text{ ، } (Y) = 150.000$$

5) هناك باحث ساذج يريد تقدير دالة الاستهلاك الإجمالي لاقتصاد بلد رأسمالي وذلك بواسطة تحديد المتغير الخاص بالاستهلاك (C) في الدخل المتاح (Y) والادخار (S) وكان النموذج كما يلي: .....

$$C_i = \beta_1 + \beta_1 Y_i + \beta_2 S_i + u_i$$

فعندما يجرب هذه المعادلة . ما مدى جودة التوفيق الذي يحصـــل عليه هذا الباحث؟ هل يمكن أن تعمم رأيك؟

(ملاحظة $C_i = Y_i - S_i$)

6) في عينة تتكون من (12) مؤسسة إنتاجية والمنتجة للكمية (Y) واليد العاملة المستعملة (X_2)، ورأسمالها المستعمل (X_3) حصلنا على القيم التالية (مقاسة بوحدات عشوائية)

$$(\Sigma Y = 753)\text{، } (\Sigma Y^2 = 48139) \text{ ، } (\Sigma YX_2 = 40830) \text{ ، } (\Sigma X_2 = 643) \text{ ، } (\Sigma X_2^2 = 34843)$$
$$(\Sigma YX_3 = 6796) \text{ ، } (\Sigma X_3 = 106) \text{ ، } (\Sigma X_3^2 = 976) \text{ ، } (\Sigma X_2X_3 = 5779)$$

a) أوجد معادلة المربعات الصـــغرى لانحدار (Y) في (X_2) و(X_3). وما هو المعنى الاقتصـــادي لمعالم المعادلة؟

b) إذا أعطيت لك عينة الكميات المنتجة ،

c) أحسب الأخطاء المعيارية للمقدرات وأختبر معنوياتها الإحصائية ؟

d) أوجد (R^2) والقيم غير المشروحة في الناتج (Y) ؟.

المحور الرابع

نماذج السلاسل الزمنية

محاضرات في نمذجة الظواهر الاقتصادية

تقديم:

تعتبر دراسة تطور الظواهر واتجاهاتها والتحكم في مساراتها، من بين أسباب نجاح المؤسسات الاقتصادية التي تعتمد على الطرق العلمية في تسييرها، حيث تحتاج كل مؤسسة معرفة وتحليل الظواهر المحيطة بها والعوامل التي تؤثر فيها والتنبؤ بقيمها في المستقبل. وذلك باستعمال نماذج التنبؤ القصير المدى، ومن بين دواعي الاستعمال:[1]

- -غياب العلاقة السببية بين المتغيرات وكذا صعوبة قياس بعضها الآخر.
- -عدم توفر المعطيات الكافية حول المتغيرات المستقلة.
- -في حالة ضعف النماذج الانحدارية إحصائيا وتنبؤيا من خلال المؤشرات التي تتمثل في: معامل الارتباط، معامل التحديد، الأخطاء المعيارية للمعلمات المقدرة.

I. السلاسل الزمنية:

إن السلسلة الزمنية هي سلسلة معطيات إحصائية مرتبطة بالزمن أو هي عبارة عن سلسلة قيم ظاهرة معينة تتغير في الزمن.

1. مركبات السلسلة الزمنية:

نقصد بها العناصر المكونة للسلسلة الزمنية، وهي تفيد في تحديد سلوكها في الماضي وكذا في المستقبل، ويمكن إدراج هذه المركبات في العناصر التالية:

أ. **مركبة الاتجاه العام:**

وهي تعبر عن تطور متغير ما عبر الزمن، وتبين الاتجاه العام للظاهرة المدروسة في المدى الطويل، حيث يقال أن الاتجاه العام الموجب إذا تزايدت قيم الظاهرة بمرور الزمن في حين يكون لها اتجاه عام سالب إذا اتجهت القيم إلى تناقص، وتكون هذه المركبة على شكل خط مستقيم ويعبر عنها إحصائيا بالشكل التالي:

$(x_t = a + bt)$

ب. **مركبة الفصلية أو الموسمية:**

تعد التغيرات الموسمية من المركبات الأساسية للسلسلة الزمنية وتعبر هذه المركبة عن التغيرات والتذبذبات الموسمية أو الفصلية الناتجة عن التغيرات في الفصول بسبب تأثير عوامل خارجية وهي تتم غالبا بطريقة منتظمة كما أنها تبين تغير الظاهرة المدروسة في المدى القصير (خلال سنة) مثلا: استهلاك المنزلي للكهرباء خلال 24ساعة، الإنتاج الزراعي، استهلاك نوعا معينا من المشروبات، إنتاج الطاقة الكهربائية...الخ.

يرمز للفصلية بالرمز s_t ، ويمكن أن تميز بين ثلاثة أشكال للمركبة الموسمية: الشكل التجميعي، الشكل المضاعف، الشكل المختلط، سنرى فيما بعد كيفية اكتشاف والتمييز بين هذه الأشكال.

ت. **المركبة الدورية أو مركبة الدورات الاقتصادية:**

[1] مولود حشمان، نماذج وتقنيات التنبؤ على المدى القصير مرجع سابق ص78

تبين هذه المركبة أثر تطور النشاط الاقتصادي في المدى المتوسط والطويل، حيث تتناسب مراحل هذه المركبة مع مراحل الدورة الاقتصادية (ركود، إنعاش، رواج، كساد) وهي تتكرر باستمرار عبر الزمن، متوسط المدة لهذه الدورة هي 5سنوات عادة.

ث. **المركبة العشوائية:**

تعبر هذه المركبة عن التغيرات التي يصعب التحكم فيها وضبطها وهي ناتجة عن عوامل غير منتظمة ولا علاقة لها بعنصر الزمن مثلا: انخفاض الإنتاج نتيجة خلل في وسائل الإنتاج أو نتيجة الإضرابات...الخ، في هذه الحالة تكون المركبة العشوائية ناتجة عن عوامل غير هامة ومستقلة.

II. طرق تحديد و اكتشاف مركبات السلسلة الزمنية:

نكتفي بطريقتين لتحديد وكشف مركبات السلسلة الزمنية تتمثل الأولى في استعمال الأشكال والعروض البيانية أما الثانية فتتمثل في استعمال الطريقة التحليلية من خلال الاختبارات الإحصائية.

أ. الطريقة البيانية:

إن استعمال هذه الطريقة لتحديد وكشف مركبات السلسلة الزمنية يتطلب دقة كبيرة في عرض بيانات السلسلة المدروسة وذلك نظرا للصعوبة الكبيرة التي يتلقاها الباحث في كشف مركباتها في كثير من الحالات. فبصفة عامة إذا كان اتجاه السلسلة الزمنية نحو الأعلى أو نحو الأسفل مع انتظام وتقارب في ذبذباتها يمكن القول أن شكل السلسلة هو شكل تجميعي متزايد أو متناقص حيث أن النموذج الموافق لهذا الشكل هو كالتالي:

$$y_t = x_t + s_t + \varepsilon_t \quad \text{او} \quad y_t = a + bt + s_t + \varepsilon_t$$

وسمي بالشكل التجميعي لان قيمة المتغير التابع هي عبارة عن محصلة تجميعية لجميع المركبات.

أما إذا كانت التذبذبات أو التغيرات السلسلة الزمنية في تزايد مع الزمن، فيمكن القول أن شكل السلسلة هو شكل مضاعف ويكتب النموذج في هذه الحالة:

$$y_t = x_t \cdot s_t(1 + \varepsilon_t) \quad \text{أو} \quad y_t = x \cdot_t s_t \cdot \varepsilon_t$$

غير انه وبصفة عامة، يصعب تحديد وكشف مركبات السلسلة الزمنية عن طريق العرض البياني ماعدا المركبة الفصلية التي تظهر جليا بالعين المجردة.

ب. الطريقة التحليلية:[1]

نظرا لعدم وضوح الطريقة البيانية، نستعين بالطريقة التحليلية لكشف مركبات السلسلة الزمنية ونكتفي في هذا المجال بطريقة الاختبارات الإحصائية الحرة وغير الحرة.

❖ **تحديد وكشف مركبة الاتجاه العام:**

[1] مولود حشمان، نماذج وتقنيات التنبؤ على المدى القصير مرجع سابق، ص59

✓ **<u>طريقة الاختبارات الحرة:</u>** سميت بالاختبارات الحرة لأنها تستعمل الأدوات الاختبارية التي لا تخضع بالضرورة لأي توزيع إحصائي فهي إذا حرة التوزيع. ومن بين الاختبارات الحرة للكشف على مركبة الاتجاه العام:

- **اختبار التوالي(تعاقب الإشارة):** يستعمل للكشف على مدى عشوائية السلسلة الزمنية ويدعى باختبار العشوائية، فإذا كانت السلسلة عشوائية معنى ذلك انه لا توجد مركبة الاتجاه العام والعكس صحيح.

إلا انه يعاب عليه ضعفه الكبير في كشفها ورغم ذلك فانه يستعان به بيداغوجيا لسهولة حسابه ولبساطته.

- **اختبار نقاط الانعطاف:** إن التسمية غير صائبة، كون الاختبار وفي تكوينه لا يهتم بنقاط الانعطاف بحد ذاتها، وإنما بعدد مرات الصعود والنزول (up and down) للمنحنى وبتعبير أخر عدد مرات تغيير الإشارة من موجب إلى سالب أو العكس، من خلال حساب الفرو قات من الدرجة الأولى (Δy_t) أي: $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$

حيث y_t : تمثل السلسلة الزمنية قيد الاختبار مرتبة ترتيبا تنازليا.

- **اختبار الإشارة:** على غرار الاختبار السابق، يعتمد اختبار الإشارة على إشارة الفروقات من الدرجة الأولى من موجبة وسالبة، كما يفترض هذا الاختبار التوزيع العشوائي للمعطيات.

- **اختبار دانيال:** يعتبر هذا الاختبار من أهم الاختبارات الحرة للكشف عن مركبة الاتجاه العام، وهو يستعين بمعامل الارتباط لسبيرمان، يعتمد هذا المعامل قياس الارتباط الخطي بين ترتيبين:الرتبي(تصاعدي مثلا) R_t و الزمن t.

✓ **<u>الاختبارات غير الحرة:</u>** تتمثل في افتراض وجود مركبة اتجاه عام في السلسلة الزمنية إضافة إلى العشوائية مع افتراض معرفة التوزيع الاحتمالي للأخطاء أي: $y_t = F(t, u_t)$ حيث: $u_t \mapsto N(0, \sigma^2)$

وبعد تحديد شكل الدالة(f) يتم تقدير معالمها ثم اختبار معنوية معلمة الاتجاه العام باستعمال مقياس الانحراف المعياري أو إحصاءة ستيودنت.

❖ **<u>تحديد وكشف الفصلية:</u>**

✓ **<u>طريقة الاختبارات الحرة:</u>** لكشف المركبة الفصلية نستعمل احد الاختبارات الأكثر تداولا ألا وهو اختبار كروسكل واليسKruskall-wallis ويرمز له بالرمز kW ويستعمل للكشف عن الفصلية فقط وتعطى علاقته بـ:

$$KW = \frac{12}{T(T+1)} \sum_{i=1}^{p} \frac{R_i^2}{m_i} - 3(T+1)$$

R_i: رتب قيم الظاهرة أو المتغير المدروس المقابلة للفصل i.

m_i: عدد القيم أو المشاهدات المقابلة للفصل i وتكون في اغلب الأحيان عدد السنوات، فإذا كان $m_i \rangle 5$ مع عدم وجود مركبة فصلية فان $kw \mapsto \chi^2(p-1)$

T: دورية المركبة الفصلية فإذا كانت السنة مقسمة إلى ثلاثيات فان $T=4$ وهكذا.

حيث إن هذا المقدار يتبع توزيع كاي مربع بـ (p-1) درجة حرية

ملاحظة: حتى نتفادى الوقوع في مغالطة نقوم بعزل أو إزالة مركبة الاتجاه العام من السلسلة قبل محاولة الكشف عن المركبة الفصلية.

✓ **طريقة الاختبارات غير الحرة:** هناك طريقتين هما:

- **الطريقة الانحدارية:** وتتمثل بدورها في افتراض وجود مركبة الفصلية في السلسلة الزمنية ب p من المؤشرات بواسطة طريقة المربعات الصغرى وإختبارها إحصائيا.
- **دالة الارتباط الذاتي:** تعتمد على فكرة الارتباط بين المشاهدات وفي فترات مختلفة، وتظهر الفصلية في هذه الدالة في شكل قمم وانخفاضات في فترات زمنية تعادل p .

أ. **طرق الإزالة:**

❖ **طرق إزالة مركبة الاتجاه العام:**

سنتعرض هنا إلى الطرق المناسبة لإبعاد مركبة الاتجاه العام الخطي خاصة من السلسلة الزمنية، كما يمكن استعمال وبتعديل بسيط لهذه التقنيات مع الاتجاه العام غير الخطي.

- **الفروقات من الدرجة الأولى:** وتتم هذه العملية بحساب الفروقات من الدرجة الأولى بتطبيق المعادلة التالية: $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$

أين تصبح Δy_t هي السلسلة الخالية من الاتجاه العام.

- **الطريقة الانحدارية:** إذا كان لدينا النموذج التالي: $Y = a + \delta.t + u_t$

أين $a + \delta.t$ تمثل الاتجاه العام بينما u_t تمثل المركبة العشوائية ونريد إزالة مركبة الاتجاه العام نقوم أولا بتقدير معلمات مركبة الاتجاه العام باستعمال طريقة المربعات الصغرى كما يلي: $\hat{Y}_t = \hat{a} + \hat{\delta}.t$

ومنه:

$$Y_t = \hat{a} + \hat{\delta}.t + e_t$$

وتكون هنا e_t أي البواقي هي السلسلة الخالية من الاتجاه العام.[1]

*مما سبق يمكن القول أن التعامل مع مركبة الاتجاه العام بطريقتين الأولى تتمثل في إزالة المركبة من السلسلة ثم التنبؤ بالسلسلة العشوائية الناتجة فقط، ويتم التنبؤ النهائي في الأخير بإضافة مركبة الاتجاه العام، كما يمكن نمذجة الاتجاه العام مباشرة وفق نموذج هولت ذو معلمين.

❖ **طرق إزالة الفصلية:**

يكون التعامل مع الفصلية، إما إزالتها من السلسلة ثم ترد إليها في الأخير للحصول على التوقع النهائي الشامل لكل المركبات الموجودة أصلا في السلسلة، أو يمكن نمذجتها مباشرة وفق طريقة هولت ونترز ذات ثلاث معادلات والمعاملات أو طريقة Buys-Ballot في حالات خاصة وسوف نرى ذلك فيما بعد.

✓ **الإزالة:** تقسم طرق إزالة الفصلية إلى فئتين الأولى لا تحسب المؤشرات الفصلية والثانية تحسبها إضافة لعملية الإزالة.

- **طرق الإزالة التي لا تحسب المؤشرات الفصلية:** نستعمل هنا كل من طريقتي المتوسطات المتحركة البسيطة والممركزة الصالحتان لإزالة الفصلية والعشوائية من السلسلة الزمنية.

كما توجد طريقة الفروقات التي تصلح لإزالة الدورية من السلسلة الزمنية وتكتب رياضيا:

$$\nabla^p y_t = y_t - y_{t-p}$$

حيث أن في المعطيات الفصلية والمعطيات الشهرية هي على الترتيب p=4 وp=12.

- **الطرق التي تزيل الفصلية مع حساب مؤشراتها:**
- **طريقة النسب الموسمية:** تستعمل هذه الطريقة الجدول والوسط الحسابي العام لحساب المؤشرات الفصلية، إلا أنها لا تفرق بين الشكل الجدائي والتجميعي أثناء الحساب.
- **طريقة المتوسطات المتحركة النسبية:** رغم كثرة مراحل حسابها إلا أنها تمتاز عن سابقتها في أنها تستطيع التفرقة بين الشكل الجدائي والشكل التجميعي للسلسلة الزمنية.

✓ **النمذجة:** يمكن نمذجة الفصلية بشكل مباشر وذلك باستعمال طريقة هولت وونترز (Holt-Winters) التي تعكس مساهمة Winters بالإضافة إلى معادلتي Holt تلك الخاصة بالمركبة الفصلية ويمكن كتابة هذا النموذج الجديد بالتجاوب مع المركبات الثلاثة وآنيا كمايلي:

كمثال على هذه الطريقة ننطلق من نموذج تجميعي التالي: $x_t = c_t + s_t + e_t$

حيث: c_t: تمثل مركبة الاتجاه العام

[1] هاري كلجيان والاس اوتس ترجمة المرسي السيد حجازي، محمد عبد القادر عطية ،مقدمة في الاقتصاد القياسي: المبادئ والتطبيقات النشر العلمي والمطابع المملكة العربية السعودية، 2001، ص43

s_t: تمثل مركبة الفصلية (الدورية) تساوي $p = s_{t+n} = s_t$

e_t: التغير العشوائي

نسمي متوسط محلي (Moyenne Locale)، المعاملات الفصلية المحلية والميل المحلي حيث أن معاملاته هي من الشكل التالي:

$$X_t = p(x_t - u_{t-n}) + (1-p)(y_{t-1} + p_{t-1})$$
$$U_t = b(x_t - y_t) + (1-b)u_{t-m}$$
$$a_t = q(y_t - y_{t-1}) + (1-q)A_{t-1}$$

فهذا يعني ثلاث تمهيدات أسية آنية: a_t, u_t, y_t حيث هي على التوالي مقدرات في الزمن (t) لمركبة الاتجاه العام c_t ومعامل الفصلية s_t والمعامل الموجه (a) لخط المسار، فالمعادلة الأولى تسمح بحساب y_t بالطريقة التالية:

- $(x_t - u_{t-1})$ عبارة عن القيمة المنزوعة للفصلية للسلسلة الزمنية (x_t) بواسطة المعامل الفصلي الأخير المقدر.
- $(y_{t-1} + a_{t-1})$ مقدر لمركبة الاتجاه العام من خلال المقدر السابق (y_{t-1}) ومقدر المعامل الموجه (a_{t-1}) في الفترة $(t-1)$
- المقدر النهائي لمركبة الاتجاه في الفترة (t) عبارة عن وسط المهد للمتغيرين السابقين.

يمكننا تقدير معامل فصلي جديد باستعمال المعادلة الثانية:

التقدير الجديد عبارة عن الوسط المهد والفرق بين x_t, y_t والتقدير السابق، حيث أن نفس الشيء بالنسبة للتقدير الجديد للمعامل الموجه لخط انحدار مركبة الاتجاه يساوي للتقدير السابق والفرق بين y_t و y_{t-1}.

التنبؤ عند الفترة T للسلسلة الزمنية (x_t) للفترة H معطى كما يلي:

$$X_t(h) = y_t + ha_t + u_{t-12+h}$$

حيث: y_t مركبة الاتجاه

ha_t الزيادة في مركبة الاتجاه ما بين $H = T + h$ و T

u_{T-12+h} معامل الفصلية.

III. طريقة بايز بالو في التنبؤية:[1]

البحث عن مركبة الاتجاه والمركبة الفصلية بطريقة بايز بالو توضح في حالة وجود مركبة الاتجاه الخطي ونموذج تجميعي حيث:

$$c_t = a.t + b$$

[1] هاري كلجيان والاس اوتس ترجمة المرسي السيد حجازي، محمد عبد القادر مرجع سابق ، ص56

$$x_t = c_t + s_t + e_t$$

أو نموذج جدائي لمركبة الاتجاه الأسي حيث:

$$c_t = e^{at+b}$$
$$x_t = c_t(1 + s_t)(1 + e_t)$$

ومنه إذا كانت المشاهدات الأولى للسلسلة موجبة إطلاقا، تكون المتابعة للوغاريتم في النموذج الثاني تأتي بنموذج تجميعي ومركبة الاتجاه الخطي.

IV. طريقة التمهيد الأسي :

طرق التمهيد الأسي تعتمد أساسا على نموذج براون والمسمى ب (EWMA)، الذي يعطي وزن أكبر للقيم الحديثة زمنيا عن سابقتها، أين تستعمل هذه الطرق في عمليات التنبؤ الخاصة بالسلاسل الزمنية، وهناك طريقتين:

✓ **التمهيد الاسي البسيط:** الفكرة الأساسية عندما لا توجد بالسلسلة الزمنية (x_t) لا مركبة الفصلية ولا مركبة الاتجاه العام، هي اعتبار أن التنبؤ الفترة (H) عبارة عن متوسط المشاهدات المعروفة: نجد مفهوم التمهيد وبأن وزن المشاهدات في هذا المتوسط كبيرة بالقدر الذي تتوافق فيه مع أفق الفترة (T): التي هي الوزن الكبير الذي يعطي للمشاهدة الأخيرة وهي تساوي:

$$x_T(h) = p_0 x_T + p_1 x_{T-1} + \ldots\ldots + p_{T-1} x_1 + p_T x_0$$

$$x_T(h) = \sum_{t=0}^{T} p_t . x_{T-t}$$

يرمز للمشاهدة الأولى بـ(x_0) لتسهيل الحسابات.

تعتمد طرق التمهيد على اختيار (p_t) التي تتغير حسب المعادلة السابقة عند فترة كل مشاهدة والتي تؤثر على مدلولية التنبؤ.

بأخذ بعين الاعتبار غياب مركبة الاتجاه، فان: $\Sigma X_t = 1$ يمكن اعتبار تطور هندسي بقيمة أقل من(1) لإعطاء لقيم x_t, x_{t-1}..... والأوزان p_0, p_1 وزن أكبر عن القيم p_{T-1}, p_T للقيم المشاهدة الأخيرة.

نضع: $P_t = k(1-p)^t$ حيث p عدد حقيقي ثابت: $0 \langle p \langle 1$ و k عدد حقيقي وضع بطريقة يكون:

$$\sum_{t=1}^{T} k(1-p)^t = 1$$

حيث: $k = 1/\ p - (1-p)^{T+1}$

تناقص المعاملات (p_t) بشكل أسي وبدلالة الزمن.

في الميدان تستعمل المعادلة التراجعية لحساب التنبؤ للفترة$x_{T-1}(h)$ بدلالة $x_T(h)$:

$$x_{T-1}(h) = p_0 x_{T+1} + p_1 x_T + \ldots\ldots + p_T x_1 + p_{T-1} x_0$$

كما يمكن كتابة:

$$x_{T-1}(h) = p \quad x_{T+1} + p(1-p)x_T + \ldots\ldots + p \quad (1-p)^{T+1} x_0$$
$$x_{T-1}(h) = p \quad x_{T+1} + (1-p)(p_0 x_t + \ldots\ldots + p_t x_0)$$
$$x_{T-1}(h) = p \quad x_{T+1} + (1-p)x_T(h)$$

ولاختيار (p) علينا أن نبدأ بوضع $x_0(h) = x_0$

فهذه الطريقة تعتمد على تجديد حساب مجموع مربعات الفوارق ما بين المشاهدات والتنبؤات h لقيم x المحصورة بين 0 و1، ومن قيم اختيار تلك التي تعطي قيم أدنى، نقوم بتدنية حالة $s(p)$:

$$s(p) = \sum (x_t(h) - x_{t+h})^2$$

قيم التمهيد (p) مرتبطة بالقيمة (h) عادة ما نختار $h = 1$

فالتنبؤات $x_t(1)$ باعتبارها القيمة الأقرب من المشاهدات x_{t+h} ولكن التنبؤات التالية:

$x_t(2), x_t(3), \ldots\ldots$ ليست مثلى.

✓ **<u>التمهيد الأسي المضاعف:</u>** يعالج التمهيد الأسي السلاسل الزمنية التي توجد بها مركبة الاتجاه العام الخطية والفصلية، حيث يستعمل من خلال منشور المتوسطات المتحركة .

فإن كانت لدينا السلسلة التالية: $x_t = a_t + b + e_t$

ولتكن السلسلة الزمنية y_t المحصل عليها بواسطة تمهيد المعامل p:

$$y_t = \sum_{t=1}^{T} p_t x_{T-t} = \sum_{t=1}^{T} p(1-p)^t [a(T-1) + b + e_t]$$

تبرهن انه إذا كانت T كبيرة بما فيه الكفاية فان مجموع القيم $(1-p)^t$ من اجل $t \rangle T$ تكون معدومة يمكن تجاهلها:

$$y_t = a_T + b + a[p/(1-p)] + E_t$$

حيث E_t محصل عليها بواسطة التمهيد الأسي للسلسلة e_t، تباين E_t أقل من تباين e_t لأنها عبارة عن وسط.

فتمهيد الأسي للسلسلة y_t يعطي السلسلة z_t، المهدة:

$$y_t = x_t + c + E_t \ldots (1)$$
$$z_t = y_t + c + E_t \ldots (2)$$
$$y_t - z_t = x_t - y_t + E_t - E_t$$

وبطرح (1) من (2) فنتحصل على:

$$c = 2y_t - z_t - E_t + E_t$$

أي

فالتقدير النهائي لمركبة الاتجاه العام للسلسلة (x_t) هو: $c_t = 2y_t - z_t$

وتقدير المعامل الموجه خط الاتجاه معطي بالعلاقة التالية: $a_T = p(y_t - z_t)/(1-p)$

و تنبؤ السلسلة (x_t) عند الفترة h معطى كمايلي: $x_T(h) = 2y_t - z_t + ha_T$

واختيار الثابت للتمهيد يكون:

التنبؤ للسلسلة (x_t) عند الفترة h محصل بالتطبيقات التالية:

$$y_t = px_t + (1-p)y_{t-1}$$
$$z_t = py_t + (1-p)z_{t-1}$$
$$a_T = p(y_t - z_t)/(1-p)$$
$$x_T(h) = 2y_t - z_t + ha$$

لكي نطبق هذه المعادلات، يجب أن نعرف y_0, z_0. نستطيع وضع $x_0 = y_0$ و $z_0 = x_0$

V. طريقة بوكس-جنكنز لتحليل السلسلة الزمنية العشوائية

من خلال ما سبق في نماذج السلاسل الزمنية، وأثناء دراستنا لظاهرة معينة نعتمد على دراسة السلوك الماضي لذلك المتغير، ثم ومن خلال النتائج المستخلصة، نبني نموذج تنبوئي مستقبلي. كون هذه النماذج، لا تستعين بكل المعلومات التي تستعملها النماذج الانحدارية من معطيات حول المتغير المراد دراسته، وكذا المعلومات الخاصة والمحيطة بهذه الظاهرة، والتي نسميها بالمتغيرات المستقلة والمؤثرة في المتغير التابع (الظاهرة) إلا أنها أثبتت جدارتها في الميدان التنبوئي القصير المدى.

إن الفرق بين نماذج الاستقطاب، وهذه النماذج المسماة بوكس-جنكنز كالفرق بين الاختبارات الحرة والاختبارات غير الحرة. ولهذا فان المجموعة الأخيرة تعتبر منافس حقيقي لنماذج الاستقطاب، رغم صعوبة التعامل معها من حيث التحديد، التقدير والاختبار مقارنة بالنماذج المكيفة الواردة ضمن نماذج الاستقطاب التي لا توفر وبسبب عدم خضوعها لعملية التقدير، مجالات الثقة، التي تساهم بشكل كبير في الاختيار الموفق للنموذج

ولهذا فان نماذج بوكس-جنكنز تحتاج إلى إمكانيات مادية وبشرية متخصصة، تقوم بمهام التنبؤ في المؤسسات الحديثة المتوسطة والكبيرة.[1]

[1] وليد اسماعيل السيفو، فيصل مفتاح شلوف صائب جواد ابراهيم اساسيات الاقتصاد التحليلي، دار الاهلية للنشر والتوزيع، الاردن، 2006، ص94

3. خصائص السلسلة الزمنية:

إن عملية التحليل في هذه النماذج وكغيرها من النماذج الأخرى تهتم باستخلاص الخصائص الجوهرية للسلسلة الزمنية بغية الاستفادة منها لأغراض النمذجة فيما بعد ومن هذه الخصائص نجد:

أ. **العشوائية:** تتمثل في المركبة العشوائية التي يجب أن تكون قد تولدت عن ظروف عشوائية وبإتباع ما تطرقنا إليه سابقا، لدينا السلسلة y_t ذات مركبتين عشوائيتين واتجاه عام وبأخذ فروقاتها من الدرجة الأولى نتحصل على سلسلة عشوائية فقط كالأتي:

$$w_t = \varepsilon_t$$
$$y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t \Rightarrow w_t = y_t - y_{t-1}$$
$$\Rightarrow y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \ldots\ldots (1)$$

حيث هذا النموذج الأخير (1) يسمى بنموذج الانتقال العشوائي أو نستطيع تسميته بنموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الأولى بمعلمة أحادية AR(1) بتعبير (Box-Jenkins).

ب. **الإستقرارية:** تكون السلسلة العشوائية مستقرة، إذا تذبذبت حول وسط حسابي ثابت، مع تباين ليس له علاقة مع الزمن، ويمكن التعبير عنه رياضيا كمايلي:

$$E(y_t) = u$$
$$E(y_t - u)^2 = \sigma^2 = \delta_0 \langle \infty, \forall t$$
$$E[(y_t - u)(y_{t-k} - u)] = \delta_k$$

كون هذه المقاييس خاصة بالمجتمع، فيمكن حساب تلك الخاصة بالعينة بواسطة الوسط الحسابي والتباين.

كذلك باستعمال فكرة المعادلات التفاضلية Differential equations وبإهمال العنصر العشوائي نستطيع دراسة الإستقرارية بالاستعانة بالمعادلة المتجانسة من الدرجة الأولى: $y_t = \varphi . y_{t-1}$

ولكي يكون الحل مستقر يجب أن يكون $|\phi| \langle 1$.

والمعادلة غير المتجانسة من الدرجة الأولى والتي تكتب بعد إهمال الخطأ العشوائي في الشكل: $y_t = \phi . y_{t-1} + d$

ويكون هذا الحل معقول عندما $|\phi| \langle 1$ وتباينها يكون ثابت.

تتمثل أسباب عدم الاستقرار في مركبة الاتجاه العام والفصلية وللتخلص من مشكل عدم الاستقرارية يجب أولا معرفة مسبباته، ثم محاولة إزالتها بإحدى الطرق السالفة الذكر، بعد تطبيق التقنية لمرة أو مرتين، ومن هذه الطرق: طريقة الفروقات من الدرجة الأولى لإزالة مركبة الاتجاه العام ومن الدرجة (p) لاستبعاد المركبة الفصلية من السلسلة الزمنية.

كما يمكن الإزالة بطريقة بوكس-جينكينز في شكلها البسيط والمتمثل في إدخال اللوغاريتم على السلسلة. وسنرى كيفية كشف عدم الاستقرار وذلك باستعمال دالة الارتباط الذاتي مع اختبار بارتلت (Bartlett) والمسمى بـ قاعدة الإبهام حيث معاملات هذه الدالة تتجه نحو عدم الانعدام في آجال محددة.

ت. **دالة الارتباط الذاتي:** توضح هذه الدالة الارتباط الموجود بين المشاهدات في فترات مختلفة وهي ذات أهمية بالغة في إبراز بعض الخصائص الهامة للسلسلة الزمنية ويعرف الارتباط الذاتي من الدرجة k كما يلي:

$$\rho_k = \frac{cov(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{var(y_t)\, var(y_{t-k})}} = \frac{E[(y_t - u_y)(y_{t-k} - u_y)]}{\sqrt{E(y_t - u_y)^2 . E(y_{t-k} - u_y)^2}} = \frac{\delta_k}{\sqrt{{\sigma_y}^2 . {\sigma_y}^2}} = \frac{\delta_k}{{\sigma_y}^2} = \frac{\delta_k}{\delta_0}$$

ومقدرات هذه التباينات والتباينات المشتركة ثم معاملات الارتباط الذاتي الخاص بالعينة تكون:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{y}_k}{\hat{y}_0} = r_k$$

$$\hat{y}_k = \frac{1}{T} \sum_{t=k+1}^{T} (y_t - \bar{y}) . (y_{t-k} - \bar{y}) = c_k$$

$$\hat{y}_0 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (y_t - \bar{y})^2 = c_0$$

ولاختبار مدلولية معاملات $\hat{\rho}_k$ (الإرتباط الذاتي) نستعمل اختبار بارتلي حيث:

$$t_{\hat{\rho}_k} = \frac{\hat{\rho}_k - \hat{\rho}_0}{\sigma(\hat{\rho}_k)}$$

مع $\sigma_{\hat{\rho}_k} = (1/\sqrt{T})(1 + 2\sum_{j=0}^{k-1} \hat{\rho}_k^2)^{\frac{1}{2}}$

حيث يمثل $\hat{\sigma}(\hat{\rho}_k)$ الإنحراف المعياري لتوزيع عينة القيم $\hat{\rho}_k$ ،ثم نقوم بإختبار الفرضية التالية:

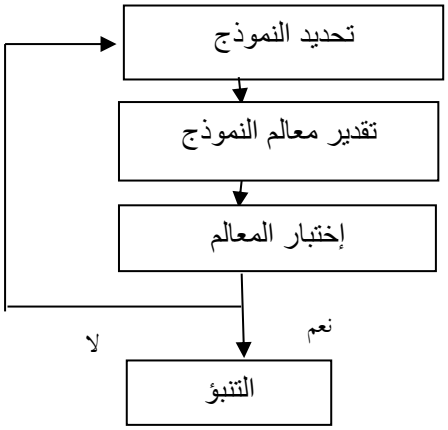
$H_0 : \rho_k = 0$

$H_1 : \rho_k \neq 0$

4. النماذج الخطية للسلسلة الزمنية:

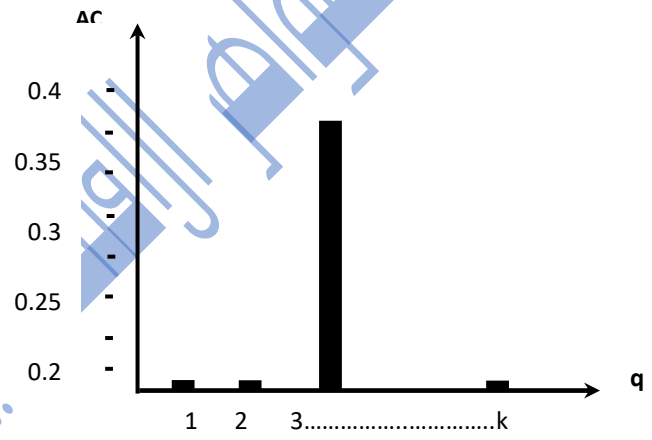
يكون الهدف الأساسي لهذه الدراسة بعد الهدف البيداغوجي، هو بناء نماذج خطية للظاهرة العشوائية واستعمالها في ميدان التنبؤ. وهذا يكون على أساس شرح أو تفسير سلوك متغير ما من خلال خصائصه البارزة والمتمثلة في ماضي هذا المتغير المدروس.

يقسم هذا الموضوع حسب بوكس-جنكنز إلى أربعة مراحل رئيسية هي متمثلة في الشكل التالي:



أ. **مرحلة تحديد النموذج:**

في هذه المرحلة يتم التعرف على النموذج الذي تخضع له السلسلة الزمنية ومن خلال دالة الارتباط الذاتي ودالة الارتباط الذاتي الجزئي سوف نتعرف عليهما فيما بعد، نستخرج الخصائص الهامة للسلسلة والتي تسمح بتحديد النموذج أو النماذج الملائمة، والتي تنتمي إلى مجموعة نماذج بوكس-جنكنز والمتمثلة في المتوسطات، النماذج الانحدارية والنماذج المختلطة والمختلطة المركبة



- **نماذج المتوسطات المتحركة:**

أول التساؤلات التي يمكن طرحها الآن حول هذا النموذج هو ما شكلها وما شكل دالة ارتباطها الذاتية؟

الأوساط المتحركة MA(q) ماهي إلا عبارة عن الوسط الحسابي لمجموعة من قيم الظاهرة، حيث يتم إعطاء أوزان متساوية لكافة مشاهدات الظاهرة، خلال الفترة المحددة فإذا حدد الباحث عدد القيم بثلاثة سمي الوسط الحسابي وسطا متحركا بفترة ثلاثة وحدات زمنية.

يمكن إجراء عملية التنبؤ بقيم أي ظاهرة من خلال استخدام الأوساط المتحركة والمحتسبة لفترات زمنية معينة.

يكتب نموذج المتوسطات المتحركة في شكل خطي كمايلي:

$$y_t = u + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \theta_3\varepsilon_{t-3} - \ldots\ldots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

وهو من الدرجة q أي يحتوي على الأكثر q من المعالم. ولاستنباط الخصائص الجوهرية للنموذج نظريا نقوم بطرح الفرضيات التالية:

$$E(\varepsilon_t) = 0$$
$$E(\varepsilon_t)^2 = {\sigma_\varepsilon}^2$$
$$E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k}) = 0 \ldots \forall k \neq 0$$

ومن شروط استقرار هذه السلسلة أن يكون وسطها غير مرتبط بالزمن وتباينها نهائي وهذا يعني أن وسطها $E(y_t) = u$

ووسط هذه السلسلة تحت هذه الفرضيات يساوي u وهو مستقل عن الزمن.

نتيجة: تنعدم دالة الارتباط الذاتي مباشرة بعد الدرجة (q) فإذا كان نموذج MA(1) فإن $p_2 = 0$ بينما إذا كان MA(2) فإن $p_3 = 0$ وهكذا.

و منه فإن دالة الارتباط الذاتي الموالية تمثل نموذج MA(3) بـ $\theta_1 = 0; \theta_2 = 0$ بينما θ_3 موجبة.

دالة الارتباط الذاتي الموالية تمثل نموذج MA(3)

- **<u>نماذج الانحدار الذاتي(p) AR:</u>**

مازلنا دائما في مرحلة التعرف على نموذج السلسلة الزمنية من خلال النظر إلى وسطها الحسابي وتباينها، فيفسر في هذا النوع من النماذج المتغير التابع الممثل للظاهرة المدروسة بواسطة ماضيه فقط، والذي يمثل سلوكه في الماضي، ويشار إليه بالرمز AR(p) ويكتب كما يلي:

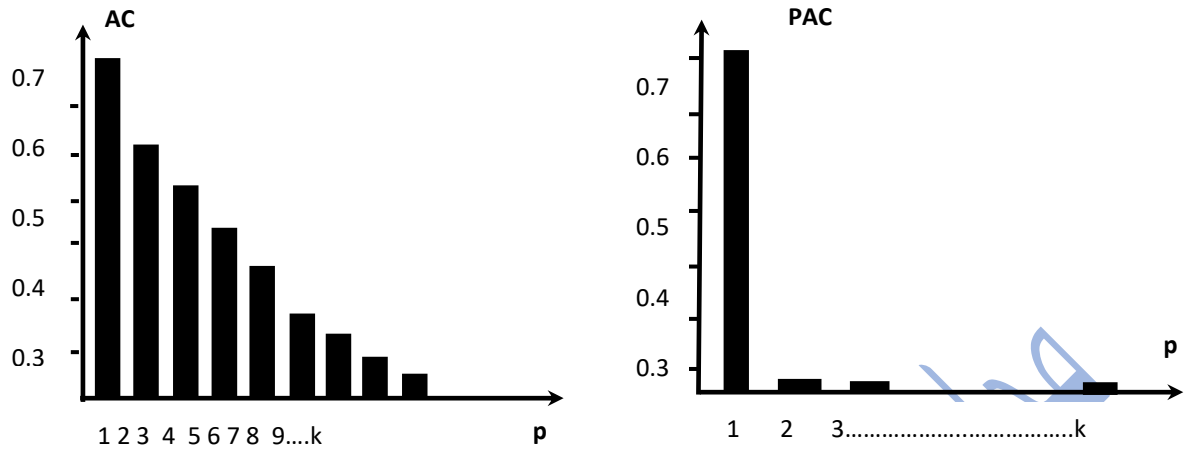
$$y_t = \sigma + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \ldots\ldots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

حيث p تمثل تأخير النموذج.

VI. <u>خصائص النموذج:</u>

على غرار نماذج المتوسطات المتحركة، نحاول النظر في خصائص النماذج الذاتية للانحدار من درجة بسيطة، لعلنا نستنتج قاعدة عامة للتعرف على هذا النوع من النماذج. من خلال دراسة دالة الارتباط الذاتي أو دالة الارتباط الذاتي الجزئي

مثلا: دالة الارتباط الذاتي لنموذج AR(1)



نتيجة: يصعب تحديد درجة النموذج الانحداري من المعلومات التي توفرها دالة الارتباط الذاتي، كونها تبقى مستمرة التدهور (مضمحلة) في حالة الاستقرار ولا تنعدم بسرعة ويكون تناقصها بشكل أسي.

إذن النتيجة المتوصل إليها من هذه الأشكال المختلفة بالنسبة للنماذج المعروضة، أن معاملات دالة الارتباط الذاتي تنطلق من الواحد وتبقى مستمرة التدهور، بينما هذه المعاملات تنعدم مباشرة عند الدرجة (q) بالنسبة لنماذج المتوسطات المتحركة، ففي حالة MA(2) مثلا تنعدم هذه المعاملات عند الدرجة (2) وهكذا.

ولهذا فإنه لا يمكن الاستعانة بهذه الدالة لتحديد درجة نماذج الانحدار الذاتي ولكن يستعان بها لأغراض أخرى هي:

1. تكشف مدى وجود الإرتباط بين مشاهدات الظاهرة المدروسة.
2. تساعد كما رأينا على تحديد درجة نماذج المتوسطات المتحركة.
3. تحديد مدى استقرارية السلسلة الزمنية، والذي يتجلى في أن معاملات دالة الارتباط الذاتي تتلاشى بسرعة أي قبل الدرجة k والتي تعادل $(T/4)$ وهو متفق عليه.
4. كشف أسباب عدم الاستقرار كوجود الفصلية والاتجاه العام.

ب. **<u>دالة الارتباط الذاتي الجزئي:</u>**

أمام الوضع الصعب الذي عرفناه للتعرف على نماذج الانحدار الذاتي AR(p)، حتى وان كان من درجة بسيطة من خلال دالة الارتباط الذاتي، نستعين بدالة الارتباط الذاتي الجزئي بعد اختبار مدلولية أو معنوية معاملاتها وذلك بالإعتماد على منحنى (AC) و(PAC). بواسطة إختبار بارتلي كما يلي:

$$t_{\hat{\Psi}_{kk}} = \frac{\hat{\Psi}_{kk} - \Psi_{kk}}{\hat{\sigma}\left(\hat{\Psi}_{kk}\right)}$$

حيث: $\hat{\Psi}_{kk}$: تمثل معاملات دالة الارتباط الذاتي الجزئي المقدرة.

$\hat{\sigma}\left(\hat{\Psi}_{kk}\right)$: تمثل الانحراف المعياري لتوزيع عينة القيم $\hat{\Psi}_{kk}$ والتي تساوي إلى: $\hat{\sigma}\left(\hat{\Psi}_{kk}\right)=1/\sqrt{T}$

ونقوم بإختبار الفرضية التالية التي تعتمد على نفس مفهوم إختبار ستيودنت كما يلي:

$$H_0 : \rho_k = 0$$
$$H_1 : \rho_k \neq 0$$

إن شكل النموذج الذي نريد تحديده، يخضع للشكل العام التالي AR(p):[1]

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \dots\dots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

ويمكن تعريف هذه الدالة بأنها تمثيل بياني لمعلمات هذه الدالة $\hat{\phi}_k$ مقابل k، ولتوضيح كيفية حساب هذه المعاملات ندرج الطريقتين التاليتين:

- **<u>الطريقة الانحدارية:</u>** تتمثل في تحديد أولا الدرجة $k = T/4$، ثم إجراء عملية التقدير لـ y_t على y_{t-1} والحصول على $\hat{\phi}_1$، ثم y_t على y_{t-2} والحصول على $\hat{\phi}_2$، وهكذا إلى غاية الحصول على $\hat{\phi}_k$، وتتحدد الدرجة p لما تنعدم أو تقترب منه $\hat{\phi}_k$، حيث $k \rangle p$
- **<u>طريقة معادلة يول-ولكر:</u>** تلجأ هذه الطريقة إلى معدلات يول-ولكر من خلال معاملات دالة الارتباط الذاتي لتقدير معالم النموذج، حيث المقدرات وفي حالة نماذج AR(p) تكون فعالة، ففي حالة AR(2) تكون لدينا معادلتين ليول-ولكر كمايلي:[2]

$$p_1 = \varphi_1 + \varphi_2 p_1 + \dots\dots + \varphi_p p_{p-1}$$
$$p_2 = \varphi_1 p_1 + \varphi_2 + \dots\dots + \varphi_p p_{p-2}$$
$$\vdots$$
$$p_1 = \varphi_1 p_{k-1} + \varphi_2 p_{k-2} + \dots\dots + \varphi_p p_{k-p}$$

وهي معادلات يول-ولكر الناتجة عن قسمة هذه المعادلات على التباين:

$$y_k = E(y_t y_{t-1}) = \varphi_1 y_{k-1} + \varphi_2 y_{k-2} + \dots\dots + \varphi_p y_{k-p}$$

بمعرفة معالم دالة الإرتباط الذاتي p_k حيث $(k = 1 \dots\dots K)$ يمكن معرفة $\phi_1 \dots\dots \phi_p$ والعكس صحيح ولهذا يمكن الحصول على هذه الأخيرة بعد تعويض p_k بمقدراتها.

ولكن المشكل المطروح هو كيفية تحديد الدرجة p وذلك بالتعويض في معادلات بول-ولكر وتعويض p_k بمقدراتها r_k ثم افتراض أن السلسلة تخضع لنموذج من الدرجة الأولى ثم الثانية وهكذا.

من خلال ما سبق رأينا أن MA(q) تنعدم فيها دالة الإرتباط الذاتي مباشرة بعد التأخير q و AR(p) تنعدم فيها دالة الإرتباط الذاتي الجزئي مباشرة بعد التأخير p نظريا، إلا انه في الواقع غير ذلك ولهذا وجب استعمال أدوات اختبارية خاصة للبحث في معنوية هذه المعاملات ثم التحديد ثم عزل المعالم غير الصفرية لكل دالة، ثم تحديد درجة النموذج إن أمكن.[3]

[1] مولود حشمان، نماذج وتقنيات التنبؤ على المدى القصير مرجع سابق ص90
[2] مولود حشمان، مرجع سابق ص91
[3] مولود حشمان، مرجع سابق ص92

✓ **النماذج المختلطة.ARMA (p.q):**

تشمل هذه النماذج على القسم الإنحداري ذي الدرجة p وقسم المتوسطات المتحركة ذو الدرجة q وتكتب في الشكل التالي:

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

✓ **النمذجة:** تمثل النماذج ARMA مركب عام وذلك بالتنسيق بين القيم الماضية والأخطاء الماضية وذلك لتعيين المعادلة.

$$ARMA(p,q): \left(1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_p L^p\right) y_t = \left(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 \dots - \alpha_q L^q\right) \varepsilon_t$$

إذن $ARMA(1,0) = AR(1)$

$ARMA(0,1) = MA(1)$

✓ **مميزات العرض البياني:** العرض البياني البسيط والجزئي يتمثل في مسلك ذو أهمية يمزج بين نوعين من العرض البياني يتركب من ARوMA بالضبط، مع الحذر كذلك جيدا من حساسية تعريف هذه المركبات انطلاقا من دراسة وظيفة دالة الإرتباط الذاتي.

✓ **شروط الاستخدام:** النماذج ARMA, MA, AR لا تكون ذات مدلولية أو غير مقبولة إلا عند السلاسل ذات:

- ☜ -الإستقرارية حول مركبة الإتجاه
- ☜ -السلاسل بعد تصحيح التغيرات الفصلية

إن دالة الارتباط الذاتي الجزئي لا تكون مسيرة من الطرف الانحداري بعد الفترة P ، بل موجهة من طرف المتوسطات المتحركة ولهذا يصعب التعرف على النماذج المختلطة والنماذج المركبة التي سنتطرق إليها فيما بعد، كون الدالتين مستمرتين الاضمحلال، فنعتمد على التجربة ثم الخبرة فيما بعد لتحديد p وq

✓ **النماذج المختلطة المركبة ARIMA (p,d,q):**

يسمى هذا النوع من النماذج بالنماذج المتجانسة غير المستقرة أو المختلطة المركبة INTEGRATED من الدرجة d التي تمثل عدد مرات تطبيق طريقة الفرو قات من الدرجة d على السلسلة الزمنية للحصول على أخرى مستقرة ويرمز إليها(المختلطة المركبة)ب $ARIMA(p;d;q)$ وهي تختلف عن ARMA(p;q) في أن السلسلة الزمنية غير مستقرة ولإزالة عدم الاستقرار هذا يجب استعمال طريقة مناسبة لمصدر عدم الاستقرار فنطبق طريقة الفرو قات من الدرجة dإذا كان مصدر عدم الاستقرار هذا هو الاتجاه العام وهذا لمرة أو مرتين بينما نطبق الفروقات من درجة مناسبة كما رأينا لإزالة الفصلية ويتغير الرمز اللاتيني للنموذج ليصبح $SARIMA_s(p,d,q)$ حيث تشير p,q إلى درجة الفصلية بينما d ترمز إلى عدد مرات تقنية الفروقات من الدرجة P على السلسلة الأصلية بينما S تمثل درجة الفصلية فتكون 4 مثلا في دورية موسمية كما نطبق طريقة **بوكس-كوكس** المتمثلة في شكلها البسيط في اللوغاريتم في حالة عدم الاستقرار الناتج عن الاتجاه العام في التباين.

فإذا ثبت لدينا مثلا وعن طريق الكشف البياني أو الإحصائي أن مصدر عدم الاستقرار في السلسلة Y_t هو الاتجاه العام نطبق الفروقات من الدرجة الأولى لمرة فتكون d=1 ونكتب: $w_t = y_t - y_{t-1}$

إذا كانت السلسلة الناتجة w_t مستقرة يكون النموذج هو ARIMA(p,1,q) فإذا كانت غير ذلك فنطبق الطريقة نفسها للمرة الثانية أي d=2 وهكذا أي: $z_t = w_t - w_{t-1}$

ويكون النموذج ARIMA(p,2,q) ونتبع نفس أسلوب التحديد لتحديد p و q للسلسلة الناتجة.

تتلخص مجمل الخطوات الضرورية أثناء العمل التطبيقي المتمثل في المراحل التالية:

- تكون دالة الارتباط الذاتي (AC) مؤشرا مهما لكشف عدم إستقرارية سلسلة زمنية وهذا عندما لا تنعدم هذه الدالة بعد فترة معينة تعادل $(T/4)$ (ربع عدد المشاهدات) وتناقصها يكون في شكل أسي نظريا، بينما تطبيقيا يجب أن تقع معاملات هذه الدالة داخل مجال ثقة مناسب حتى تكون مستقرة وإلا فلا. وهنا نكون بصدد دراسة النماذج المركبة كما أنها تعتبر كاشف مهم للفصلية من خلال القمم والتنبؤات التي تظهر في شكل منتظم على هذه الدالة.
- بالنسبة لنماذج المتوسطات المتحركة من الدرجة q تنعدم دالة الارتباط الذاتي مباشرة بعد الدرجة q بينما دالة الارتباط الذاتي الجزئية متدهورة أي متناقصة ولكنها لا تنعدم لحظيا.
- بالنسبة لنماذج الانحدار الذاتي من الدرجة p فإن دالة الارتباط الذاتي الجزئية (PAC) تنعدم مباشرة بعد الدرجة هذه بينما دالة الارتباط تبقى متناقصة ولكنها لا تنعدم بنفس السرعة.
- أما النماذج المختلطة فإن الدالتين تبقيان مستمرتي التدهور ولكنهما لا تنعدمان عند الدرجتين المذكورتين سابقا.

نوع النموذج	دالة الارتباط الذاتي	دالة الارتباط الذاتي الجزئي
MA (q)	تنعدم بعد الفترةq	غير منعدمة
AR (P)	غير منعدمة	تنعدم بعد الفترة p
ARMA (p,q)	غير منعدمة	غير منعدمة

✓ **النماذج الفصلية:**

إن المعطيات الاقتصادية غير السنوية في غالب الأحيان ما تكون ذات مركبة دورية من الدرجة (p) كما رأينا من قبل. وتأخذ هذه النماذج الأشكال المختلفة السابقة من $SARMA_s(p,q)$ $SMA_s(q)$ $SAR_s(p)$ التي يمكن

تمثيلها وعلى الترتيب في الأشكال التالية لما p=1،q=1 ، s=1، بمعنى أن الدورة شهرية $y_t = \phi y_{t-12} + \varepsilon_t$ و نرمز له بـ $SAR(1)_{12}$ بينما نكتب $SMA(1)_{12}$ في شكله التالي: $y_t = \theta\varepsilon_{t-12} + \theta\varepsilon_t$

يمكن تطبيقيا تحديد الدرجة الفصلية للنموذج من خلال النظر في المعاملات الفصلية فقط للدالة (PAC), المذكورة سابقا وبنفس المنهجية السابقة أيضا.

ومن خلال التمعن في دالة الارتباط الذاتي، وعلى غرار ما قلناه سابقا نستنتج مايلي:

- تظهر المعلومات الجوهرية للسلسلة في الفترة $(T/4)$ المذكورة سابقا.
- المركبة الفصلية بارزة فيها، ولذا يجب أخذها بعين الاعتبار عند النمذجة حيث نسجل قمّة عند كل 12 شهر كون المعطيات شهرية.
- تعتبر هذه السلسلة مستقرة كون معاملات دالة الإرتباط الذاتي للسلسلة هذه دخلت مجال الثقة المتمثل في أن معاملات دالة الإرتباط لا تنعدم كما رأينا نظريا، أي أن معاملات هذه الدالة لا تصبح مساوية للصفر بعد أجل مسمى.

فيعتبر كل معامل ارتباط ذاتي في دالة الإرتباط الذاتي الكلية أو الجزئية معدوما إذا وقع ضمن المجال: $\pm 2\sigma(\hat{\rho}_k)$

حيث: $$\sigma(\hat{\rho}_k) = \left(1/\sqrt{T}\right)\left(1 + 2\sum_{i=1}^{k-1}\hat{\rho}_i{}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

وهذا يسمى اختبار بارتلت Bartelet test الذي يستعان به في عزل تلك المعاملات الضعيفة المعنوية، أي الواقعة داخل هذا المجال والمذكور أعلاه ومنه تحديد الدرجة (q) لقسم المتوسطات المتحركة لنموذج $ARMA(P,q)$

بينما إذا كان: $$\sigma(\hat{\rho}_k) = 1/\sqrt{T}$$

فنسميه اختبار أو قاعدة الإبهام Rule of thump الذي يستعمل مع:

- دالة الارتباط الذاتي لكشف الإستقرارية للسلسلة الزمنية.
- دالة الارتباط الذاتي الجزئي لمعرفة درجة القسم الانحداري لنموذج ARMA(p,q) وهو: $\sigma(\Psi_{kk}) = 1/\sqrt{T}$
  - بالخبرة يمكن مباشرة من خلال البيان نستنتج أن تلك الدالة قد تمثل دالة الارتباط الذاتي لنموذج AR(p) بدورية مقدارها 12 شهرا أي p=1, $SAR_s(p)$ يصبح $SAR(1)_{12}$

إلا أننا نفضل في هذه الحالة أن تنعكس الفصلية في قسم المتوسطات المتحركة، كون دالة الإرتباط الذاتي الجزئي خالية من دليل على التأثير الفصلي على دالة الارتباط الذاتي.

تجدر الإشارة هنا انه يمكن نمذجة الفصلية مباشرة، أو إزالتها بطريقة مناسبة فتحديد النموذج ثم إرجاع المركبة الفصلية بعد عملية التنبؤ الموفقة.

أ. **مرحلة تقدير معالم النموذج:** بعد الانتهاء من مرحلة التعرف على نموذج السلسلة الزمنية وذلك بتحديد كل من (p,d,q) يمكننا الانتقال إلى المرحلة التقنية الموالية والمتمثلة في مرحلة التقدير لمعالم النموذج.

VII. تقدير معالم نموذج الانحدار الذاتي:

في هذا النوع من النماذج وبعد تحديد الدرجة (p) يصبح من الميسور تقدير معالمه $\phi_1,\phi_2,.....\phi_p$ وذلك باستعمال إحدى الطرق التالية:

- طريقة معادلات يول-ولكر
- الطريقة الانحدارية.

اللتان تم التطرق إليهما سابقا بالإضافة إلى الطريقة الثالثة والمتمثلة في:

- **طريقة أعظم احتمال (المعقولية العظمى):**

فالتقدير بهذه الطريقة يتوقف أساسا على تحقق التوزيع الطبيعي، وتعتمد مبدأ تصغير أو تدنية مجموع مربعات البواقي Min RSS بمعنى أننا سنختار شعاع المعالم $(\phi_1+\phi_2+.....+\phi_P)$ الذي يضمن تصغير مجموع مربعات البواقي، أي: $MinS(\hat{\phi})=\sum {e_t}^2$

و يمكن الاستعانة بهذه الطريقة عند تقدير النماذج المختلطة حيث يتم في تلك الحالة اختيار مقدرات لشعاعي المعالم الخاصة بالجزئين الانحداري أو المتوسطات المتحركة $\phi=(\phi_1,\phi_2,....\phi_p)$

و $\theta=(\theta_1,\theta_2,.....\theta_p)$ على الترتيب ويتم في هذه الحالة تصغير مجموع مربعات البواقي كالعادة حيث:

$$MinS(\hat{\varphi},\hat{\theta})=\sum e_t^{\,2} \leftrightarrow e_t=\hat{\theta}^{-1}(L)\hat{\varphi}(L)y_t$$

إلا أن هذه الطريقة تحتاج إلى توفير قيم ابتدائية خاصة بالمتغير y_t مثل $y_0,y_{-1},.....y_{-p}$ حيث دالة المعقولية العظمى في هذه الحالة تكون شرطية لهذا السبب، ويمكن فهم هذه الظاهرة بسهولة عند تعويض t بـ $(1,2,3,.....p)$ في دالة المعقولية العظمى أو في علاقة البواقي السابقة.

✓ **تقدير معالم نماذج المتوسطات المتحركة والمختلطة:** تعتبر هذه النماذج ARMA(p,q) و MA(q) أعقد بكثير من حيث التقدير من النماذج الانحدارية، كونها غير خطية في المعالم من جهة وعدم مشاهدة متغير الأخطاء من ناحية ثانية.

فهدف التقدير هنا هو تحديد معالم الجزء الانحداري وجزء المتوسطات المتحركة ARMA(p,q) معا، أو معالم قسم المتوسطات المتحركة لوحدها في نموذج MA(q)

حيث في حالة غياب MA(q) يسهل تقدير معالم هذه العلاقة: $e_t=\hat{\theta}^{-1}(L)\hat{\phi}(L)y_t$

بينما في حالة حضورها لوحدها أو مع مركبة النماذج الانحدارية AR(p) فان هذه العلاقة تصبح غير خطية المعالم وبالتالي تتطلب طريقة تقدير تكرارية ومن بين هذه الطرق:

- **طريقة البحث التشابكي Grid-Search:** تعتمد هذه الطريقة على استعمال الطريقة الخطية للتقدير (O.L.S) وكذلك عملية حساب مجموع مربعات البواقي المقابلة للمعلمتين (θ,ϕ) حيث يتم تكرار العملية لتغطية كامل مجال التعويض لـ(θ)
- **طريقة غوس-نيوتن التكرارية Gauss-Newton**تعتمد هذه الطريقة على تدنية مجموع مربعات البواقي.

نشير إلى أنها و-كغيرها من الطرق التكرارية- تعتمد بشكل كبير للوصول إلى الحل على القيم الابتدائية المستعملة والتي نأسف لعدم وجود طريقة مثلى تسمح بالاختيار الموفق لهذه القيم للوصول إلى تقدير معالم النموذج في اقل عدد ممكن من التكرارات.

ب. **مرحلة تشخيص النموذج Diagnostic checking:** بعد الانتهاء من مرحلتي تحديد وتقدير النموذج، نود التطرق إلى المرحلة الثالثة من عملية النمذجة وهي اختبار قوة النموذج الإحصائية ثم التنبؤية في مرحلة لاحقة وهذه المرحلة تتطلب الخطوات التالية:

- مقارنة دالة الارتباط الذاتي للسلسلة الأصلية مع تلك المتولدة عن النموذج المقدر، فإذا لوحظ وجود اختلاف جوهري بينهما فانه يكون دليلا قطعيا على فشل عملية التحديد، وهذا يستدعي إعادة عملية بناء النموذج وتقديره.
- أما إذا تشابهت الدالتين فإننا ننتقل إلى دراسة وتحليل بواقي النموذج وهذه العملية تتطلب حساب ورسم دالة الارتباط الذاتي لهذه البواقي، ثم اختبارها.
- نشير هنا لإمكانية تجاوز بعض النماذج لهذه الاختبارات وللقيام بعملية المفاضلة بينهما نستعمل المقاييس التالية:

$$AIC = \hat{\sigma^2}.exp\left\{2\left(\frac{p+q}{T}\right)\right\}$$

حيث $\hat{\sigma^2} = S^2$ محسوبا بطريقة المعقولية العظمى أي بقسمة مجموع مربعات البواقي على عدد المشاهدات فقط كما أن المقدار $(p+q)$ هنا يشير إلى عدد معالم النموذج المقدر وليس مجموع درجتي النموذج.

كما يمكن كتابة هذا المعيار في شكله اللوغارتمي كما يلي:

$$AIC = ln(\hat{\sigma^2}) + \left\{2\left(\frac{p+q}{T}\right)\right\}$$

وبسبب إعطائه وزن أكبر للنماذج المستعملة لأكبر عدد من المشاهدات عدّل بما يلي: $NAIC = \frac{AIC}{T}$

ت. **مرحلة التنبؤ:** إن مرحلة التنبؤ تعد آخر وأهم مرحلة بإعتبار أن التنبؤ هو عملية عرض حالي لمعلومات مستقبلية باستخدام معلومات مشاهدة تاريخية وذلك بإستعمال نماذج السلاسل الزمنية كون هدفها الأساسي هو تحقيق التنبؤ.كما اقترحا بوكس وجينكنز صيغة عامة للتنبؤات، باعتبار أن كل نموذج ARMA يمكن كتابته على شكل سلسلة التذبذبات العشوائية، وذلك بتحويل عبارات AR إلى MA غير منتهية:

$$\Phi(B).(X_t - \mu) = \theta(B).\varepsilon_t \ldots (1)$$

حيث يمثل: $\Phi(B)$: كثير حدود لمعاملات تأخير السلسلة X_t.

μ : عبارة عن ثابت.

$\theta(B)$: كثير حدود لمعاملات تأخير المتغير العشوائي.

ε_t: المتغير العشوائي.

و يمكن كتابة (1): $X_t = \mu + \frac{\theta(B)}{\Phi(B)}\varepsilon_t = \mu + \psi(B)\varepsilon_t = \mu + (\psi_0 + \sum_{r\geq 0}\psi_r.B^r).\varepsilon_t$

إذا $\psi_0 = 1$

المرشح الخطي $\psi(B)$ يسمى بدالة التحويل:[1]

$$\psi(B) = \frac{1-\theta_1.B-\theta_2.B^2-.....-\theta_q.B^q}{1-\phi_1.B-\phi_2.B^2-.....-\phi_p.B^p} = \psi_0+\psi_1.B+\psi_2.B^2$$

$$\Rightarrow X_t = \mu + \left(1+\sum_{r\geq 0}\psi_r.B^r\right).\varepsilon_t = \mu+\varepsilon_t+\psi_1.\varepsilon_{t-1}+\psi_2.\varepsilon_{t-2}+.....(2)$$

إذا كانت المعاملات $(\psi_1,\psi_2,.....)$ غير منتهية فالنموذج هو عبارة عن نموذج MA فقط في حين إذا كانت هذه المعاملات منتهية فإن النموذج هو عبارة عن AR أو ARMA، وإذا كانت X_t مستقرة فإن μ تمثل متوسط السلسلة، وفي الحالة العكسية فإن μ تمثل مستوى تغيرات السلسلة المحددة بعملية الفروقات.

ولتحديد وزن كل معاملات ψ_r النموذج (2) $(ARIMA(P.d.q))$، فأن حسابهم بالتراجع:

$$\psi(B) = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \Leftrightarrow \phi(B)\psi(B) = \theta(B)$$

$$\Rightarrow (1-\phi_1.B-\phi_2.B^2-.....-\phi_{p+d}.B^{p+d})(1+\psi_1.B+\psi_2.B^2+\psi_3.B^3+....)$$

$$=(1-\theta_1.B-\theta_2.B^2-.....-\theta_q.B^q)$$

وبالمطابقة نقارن بين معاملات (B) حسب القوة نتحصل على:

$$\psi_1 = \phi_1 - \theta_1$$

$$\psi_2 = \phi_1.\psi_1 + \phi_2 - \theta_2$$

.....

$$\psi_r = \phi_1.\psi_{r-1} + \phi_2.\psi_{r-2} + ...+\phi_{p+q}.\psi_{r-p-d} - \theta_r \qquad ,r \leq q$$

$$\psi_r = \phi_1.\psi_{r-1} + \phi_2.\psi_{r-2} + ...+\phi_{p+q}.\psi_{r-p-d} \qquad ,r \succ k$$

مع: $k = Max(p+d-1,q)$

القيمة المتوقعة في الفترة (r) لنموذج $ARIMA(P.d.q)$ تعطى كما يلي: $\hat{X}_T(r) = \mu + \sum_{v\geq 0}\psi_{r+v}.\varepsilon_{T-v}$

حيث يساوي خطأ التنبؤ: $\hat{\varepsilon}_T(r) = X_{T+r} - X_T(r) = X_{T+r} + \sum_{v=1}^{r-1}\psi_v.\varepsilon_{T+r-v}$

وتباين خطا التنبؤ يعطى كما يلي: $VAR[\varepsilon_T(r)] = E[X_{T+r} - X_T(r)]^2 = \sigma_\varepsilon^2.\left(1+\sum_{v=1}^{r-1}\psi_v^2\right)$

ويكون مجال التنبؤ بخطأ 5% كما يلي: $\hat{X}_T(r) \pm 1.96\sigma_\varepsilon\left(1+\sum_{v=1}^{r-1}\psi_v^2\right)^{1/2}$

التنبؤات الناتجة من نموذج ARIMA تعتبر مثلى مقارنة بنماذج اخرى عادية.

[1] طارق محمد الرشيد، المرشد في لاقتصاد القياسي التطبيقي ، مرجع سابق ص89

المحور الخامس:

نماذج المعادلات الآنية

محاضرات في نمذجة الظواهر الاقتصادية

تقديم:

نماذج المعادلات الآنية (Structural Equation Models - SEM) هي مجموعة من الأساليب الإحصائية التي تستخدم لتحليل العلاقات المعقدة بين المتغيرات. يمكن أن تتضمن هذه النماذج العديد من المتغيرات التابعة والمستقلة، بالإضافة إلى المتغيرات الكامنة (الغير مرصودة) التي تمثل المفاهيم أو الأنماط المعقدة التي يصعب قياسها مباشرة. ومن الخصائص الرئيسية لنماذج المعادلات الآنية نجد انه يسمح بوجود متغيرات كامنة، وهي متغيرات لا يمكن قياسها مباشرة (مثل "الذكاء" أو "الرضا الوظيفي") ولكن يمكن قياسها من خلال مؤشرات مرصودة (مثل نتائج الاختبارات أو استبيانات الرضا). كما تسمح نماذج SEM بتحليل العلاقات بين المتغيرات بطريقة مباشرة وغير مباشرة. هذا يشمل:

- العلاقات المباشرة: بين متغيرين مرتبطين مباشرة.
- العلاقات غير المباشرة: من خلال تأثيرات متغيرات وسيطة.

كما ان نماذج المعادلات الآنية SEM يتميز بقدرته على تحديد النماذج السببية (causal models)، حيث يتم فرض علاقات سببية بين المتغيرات الكامنة والملاحظة. وتستخدم كذلك لتحليل البيانات التي تحتوي على متغيرات متعددة الأبعاد، مثل استبيانات يمكن أن تقيس أكثر من بُعد واحد للمفاهيم. بالإضافة الى استخدامها في التحليل التأكيدي للنماذج التي تم تطويرها نظريًا، حيث يتم اختبار مدى ملاءمة النموذج مع البيانات. وتتكون نماذج المعادلات الآنية من المتغيرات الملاحظة (Observed Variables) التي يمكن قياسها مباشرة. والمتغيرات الكامنة (Latent Variables) التي لا يمكن قياسها مباشرة ويتم تمثيلها من خلال مؤشرات ملاحظة والمعادلات الهيكلية (Structural Equations) التي تمثل العلاقات السببية بين المتغيرات الكامنة. بالإضافة الى المعادلات القياسية (Measurement Equations) التي تصف كيفية ارتباط المتغيرات الكامنة بالمؤشرات الملاحظة.

ويمكن تطبيق نماذج المعادلات الآنية في البحوث الاجتماعية مثل دراسة تأثير العوامل الاجتماعية والنفسية على السلوك البشري. كما يمكن تطبيقها في ميدان الاقتصاد لدراسة العوامل المؤثرة في النمو الاقتصادي أو تحليل سلوك المستهلك. بالإضافة الى إمكانية تطبيقها في ميدان التعليم لتحليل العلاقات بين العوامل التعليمية مثل المهارات الأكاديمية والنتائج المدرسية. وميدان علم النفس لتحليل العوامل النفسية التي تؤثر على سلوك الفرد.[1]

ونجد من أنواع هذه النماذج:

I. نموذج توازن السوق:

لدينا معادلة نموذج الطلب الخطية الشكل التالي:

$$Q_i^d = \alpha_0 + \alpha_1 +$$

[1] طارق محمد الرشيد، المرشد في لاقتصاد القياسي التطبيقي مرجع سابق ص109

حيث:

Q_i^d الكمية المطلوبة P_i سعر السلعة

U_i المتغير العشوائي α_i معاملات النظام

لدينا معادلة نموذج العرض الخطية الشكل التالي:

$$Q_i^s = \beta_0 + \beta_1 P_i + U_i$$

حيث: Q_i^s الكمية المطلوبة P_i سعر السلعة

U_i المتغير العشوائي β_i معاملات النظام

وفي وضع التوازن يتحدد سعر السلعة P_i والكمية المطلوبة Q_i من تقاطع كل من منحنى العرض والطلب،

$$Q_i^d = Q_i^s$$

نجد في هذا النموذج الاول، أن تغيرات U_i سببها عوامل خارج النموذج مثل: الدخل، الثروة، الذوق، والتي تؤثر على السعر والكمية المطلوبة ونجد في النموذج الثاني ان تغيرات U_i سببها عوامل خارج النموذج مثل: المناخ والاستيراد، وغيرها من العوامل الأخرى، والتي تؤثر على السعر والكمية المعروضة

II. النموذج الكينزي في تحديد الدخل:

لدينا الشكل البسيط لنموذج كينز، حيث نجد أن:

$$\begin{cases} C_i = \alpha + \beta Y_i + U_i \\ Y_i = C_i + I_i \\ I_i = S_i \end{cases}$$

إذا من المعادلتين الأوليتين نلاحظ أن هناك علاقة تداخل بين Y وC، وبين Y والحد العشوائي U. وأن Y مرتبطة مع U، وأي تغير في U بسبب عوامل خارجية عشوائية كثيرة تؤدي بدالة الاستهلاك للتغير، وبالتالي يدفع لتغير Y.

وهذا يؤدي الى استنتاج أن طريقة المربعات الصغرى التقليدية OLS لتقدير معالم النموذج تعطي تقديرات متحيزة وغير متسقة.

مع العلم ان هناك العديد من الأمثلة الأخرى عن النماذج الآنية، نذكر منها:

- ✓ نموذج فليبس في الأجور والأسعار Phillips model
- ✓ نموذج والارس للتوازن العام Walrasion Model of General Equilibrium
- ✓ -نموذج كيلفن القياسي

III. الصيغة العامة لنماذج المعادلات الآنية:

نفترض أنه لدينا النموذج الخطي العام التالي:

$$\begin{cases} \beta_{11}Y_{1i} + \beta_{12}Y_{2i} + \cdots + \beta_{1k}Y_{ki} + \theta_{11}X_{1i} + \theta_{12}X_{2i} + \cdots + \theta_{1k}X_{ki} = U_{1i} \\ \beta_{21}Y_{1i} + \beta_{22}Y_{2i} + \cdots + \beta_{2k}Y_{ki} + \theta_{21}X_{1i} + \theta_{22}X_{2i} + \cdots + \theta_{2k}X_{ki} = U_{2i} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_{n1}Y_{1i} + \beta_{n2}Y_{2i} + \cdots + \beta_{nk}Y_{ki} + \theta_{n1}X_{1i} + \theta_{n2}X_{2i} + \cdots + \theta_{nk}X_{ki} = U_{ni} \end{cases}$$

ولتقديم هذا النموذج المتكون من n من المعادلات الهيكلية، وكل معادلة تحتوي على n من المتغيرات الداخلية، وK من المتغيرات الخارجية، ومتغيرات الحد العشوائي بفرض انها موزعة توزيعا طبيعيا،

يمكن كتابة نظام المعادلات هذا على الشكل المصفوفي التالي:

$$\beta Y_i + \theta X_i + U_i$$

إذا كانت المصفوفة β مصفوفة منتظمة يمكن كتابة ما يلي:

$$Y_i = -\beta^{-1}\theta X_i - \beta^{-1}U_i$$

ومنه يمكن تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية في تقدير معالم هذا النموذج ونحصل على تقديرات متسقة، إذا كان كل من المتغير U_i مستقل عن المتغير X_i.

IV. مشكلة التحيز الآني:

ان تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية لتقدير معلمات أي معادلة بصفة انفرادية من ضمن منظومة من المعادلات الآنية سيعطي تقديرات متحيزة لمعالم المعادلة، ذلك بسبب وجود ارتباط بين متغير واحد أو أكثر من المتغيرات المستقلة والحد العشوائي، ولتوضيح ذلك :[1]

- نأخذ الفرضيات الكلاسيكية للنموذج الخطي لتقدير معالم دالة الاستهلاك

$$\begin{cases} E(U_i) = 0; & \mathrm{E}(U_i^2) = \sigma_u^2 \\ E(U_iU_j) = 0 & \forall i; \forall \mathrm{j}; \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \\ \mathrm{Cov}(I_i, U_i) = 0 \end{cases}$$

ونأخذ النموذج الكينزي البسيط لتحديد الدخل المشروح بنظام المعادلات الآنية التالية:

$$\begin{cases} \mathrm{C}_i = \alpha + \beta \mathrm{Y}_i + U_i \\ Y_i = \mathrm{C}_i + \mathrm{I}_i \\ \mathrm{I}_i = S_i \end{cases}$$

[1] Engle, Robert F.and C.W.J Ganger "Co integration and Error Correction: Representation Estimation and Testing "Econometrica, 1987 p165

وبتعويض قيمة C في المعادلة الثانية، نجد:

$$\begin{aligned} Y_i &= \alpha + \beta Y_i + U_i + I_i \\ Y_i - \beta Y_i &= \alpha + U_i + I_i \\ Y_i(1-\beta) &= \alpha + U_i + I_i \\ Y_i &= \frac{\alpha}{(1-\beta)} + \frac{I_i}{(1-\beta)} + \frac{U_i}{(1-\beta)} \end{aligned}$$

ومع أخذ القيمة المتوقعة نحصل على:

$$E(Y_i) = \frac{\alpha}{(1-\beta)} + \frac{I_i}{(1-\beta)}$$

وذلك لأن $E(U_i) = 0$ هو متغير خارجي قيمته محددة مسبقا، وبالقيام بالعملية التالية، نجد:

$$Y_i = E(Y_i) = \frac{U_i}{(1-\beta)}$$

ولدينا نتيجة المعادلة التالية محققة

$$U_i - E(U_i) = U_i$$

وهذا يؤدي الى إن التباين المشترك بين كل من Y_i وU_i، هو:

$$\begin{aligned} Cov(Y_i, U_i) &= E\left[\left(Y_i - E(Y_i)\right)\left(U_i - E(U_i)\right)\right] \\ &= E\left[\left(Y_i - E(Y_i)\right)U_i\right] \\ &= E\left[\frac{U_i}{(1-\beta)}U_i\right] \\ &= \frac{1}{(1-\beta)}E(U_i^2) = \frac{1}{(1-\beta)}\sigma_u^2 \neq 0 \end{aligned}$$

وهذا يجعل ان هناك ارتباط بين الحد العشوائي والمتغير Y، وهذا يؤدي إلى أن تقدير معالم النماذج الآنية بطريقة المربعات الصغرى العادية تكون متحيزة وغير متسقة. وبهذا تتكون لدينا مشكلة التحيز الآني.

V. مشكلة التمييز:

يمكن تصنيف القيود على المعلمات في نماذج المعادلات الآنية إلى نوعين من القيود: قيود النفي. وقيود خطية.

أ. شروط التمييز:

إن شروط التمييز تحدد معادلة بمعادلة، ويمكننا التفريق بين ثلاث حالات للتمييز.

- **نموذج تحت التمييز:** إذا كان يحتوي على معادلة لا يمكن تعريفها أو تحديدها، وهذا يعني أن عدد المعادلات أقل من عدد المعالم التي يجب تحديدها في النموذج الآني، ومنه فإن هذا النموذج لا يمكن إيجاد له حلول.

معادلة تحت التمييز.. $g - 1 > g - \grave{g} + k - k$ ... ...

- **نموذج مميز:** إذا كانت جميع المعادلات معرفة أو محددة

معادلة مميزة... $g - 1 = g - \grave{g} + k - \grave{k}$

- **نموذج فوق التمييز:** إذا كانت معادلات النموذج إما معرفة أو معرفة بدرجة كبيرة

معادلة فوق التمييز... $g - 1 < g - \grave{g} + k - \grave{k}$

ب. **طريقة تحديد شروط التمييز:**

إذا كانت القيود التي يتميز بها النموذج هي قيود نفي فقط تكون شروط التمييز كما يلي:

معادلة تحت التمييز... $g - 1 > g - \grave{g} + k - \grave{k}$

معادلة مميزة... $g - 1 = g - \grave{g} + k - \grave{k}$

معادلة فوق التمييز... $g - 1 < g - \grave{g} + k - \grave{k}$

حيث: g: عدد المتغيرات الداخلية في النموذج، أو كذلك عدد المعادلات في النموذج"

k: عدد المتغيرات الخارجية في النموذج.

$\grave{g}$: عدد المتغيرات الداخلية التي تظهر في المعادلة

$\grave{k}$: عدد المتغيرات الخارجية التي تظهر في المعادلة

ملاحظة: لكي تكون المعادلة ليست تحت التمييز، يجب أن يكون عدد المتغيرات المقصاة من المعادلة على الأقل يساوي عدد المعادلات في النموذج ناقص واحد.[1]

وكذلك إذا كان النموذج يحتوي على قيود خطية تتعلق بمعاملات المعادلات، فإن شروط التمييز تكون على الشكل التالي:

معادلة تحت التمييز... $g - 1 > g - \grave{g} + k - \acute{k} + r$

معادلة مميزة... $g - 1 = g - \grave{g} + k - \acute{k} + r$

معادلة فوق التمييز... $g - 1 < g - \grave{g} + k - \acute{k} + r$

حيث r: تمثل عدد القيود الخطية في المعادلة.

VI. الشكل العام والشكل المختزل للمعادلات:

يطلق اسم الشكل المختزل على المعادلات التي تشتق من الشكل العام أو الهيكلي للنموذج، ويلاحظ أن معادلات الشكل المختزل تجعل كل متغير داخلي بدلالة نفس المتغيرات المستقلة، وذلك بإعادة كتابة المعادلات

[1] Nelson C.and Pollser, Trends and Random Walkes in Macroeconomic Time Series: Some Evidens and Implication Journal of money economics, 1989, vol,10 p87

الآنية بأسلوب معين وباستخدام رموز جديدة تعبر عن جزء من العلاقات داخل كل معادلة حيث يجري التعبير عن المتغيرات الداخلية كدوال في المتغيرات المحددة مسبقا فقط.

مثال1:

ليكن لدينا نموذج المعادلات الآنية التالي:

$$\begin{cases} Y_{1i} = \propto (Y_{2i} + X_{1i}) + U_{1i} \\ Y_{2i} = \beta Y_{1i} + \gamma Y_{1i-1} + U_{2i} \end{cases}$$

Y_{1i}: الناتج الوطني الخام لسنة t

Y_{2i}: الاستهلاك المنزلي لسنة t

X_{1i}: الطلب النهائي غير الطلب "الاستهلاك" المنزلي لسنة t

1- قم بتحديد شروط التمييز أو "التشخيص" لهذا النموذج؟

2- أوجد الشكل المختزل لهذا النموذج؟

الحل:

1-تحديد شروط التشخيص: في هذا النموذج لدينا ما يلي: k=2 ، g=2.

المعادلة الأولى:

نلاحظ بالنسبة للمعادلة الأولى أنه يجب على معامل كل من Y_{2i} و X_{1i} أن يكونا متساويين، وهذا يعني وجود شرط قيد خطي واحد، ومنه فإن شروط التشخيص تكون كما يلي:

$$g - 1(?)g - \grave{g} + k - \acute{k} + r$$

ولدينا: r=1، k=1 ،g=2 ومنه فإن :

$$g - 1 = 2 - 1 = 1 < g - \grave{g} + k - \acute{k} + r = 2 - 2 + 2 - 1 + 1 = 2$$

ومنه فإن المعادلة الأولى لها تشخيص أعلى أو فوق التمييز".

المعادلة الثانية:

شروط التشخيص، حيث لدينا ما يلي: g=2،k=1 ومنه:

$$g - 1 = 2 - 1 = 1 = g - \grave{g} + k - \acute{k} + r = 2 - 2 + 2 - 1 = 1$$

ومنه فإن المعادلة الثانية كاملة التشخيص أو مميزة

ملاحظة: يمكننا تقدير معلمات النموذج

2- **إيجاد الشكل المختزل:**

وللحصول على الشكل المختزل انطلاقا من الشكل العام للنموذج نقوم بالعمليات الحسابية (أو الرياضية) التالية:

المعادلة الأولى:

$$\begin{cases} Y_{1i} = \propto (\beta Y_{1i} + \gamma Y_{1i-1} + U_{2i}) + \alpha X_{1i} + U_{1i} \\ (1-\alpha\beta)Y_{1i} = \alpha X_{1i} + \alpha\gamma Y_{1i-1} + U_{1i} + \alpha U_{2i} \\ Y_{1i} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\right)X_{1i} + \left(\frac{\alpha\gamma}{1-\alpha\beta}\right)Y_{1i-1} + \left(\frac{1}{1-\alpha\beta}\right)U_{1i} + \left(\frac{1}{1-\alpha\beta}\right)U_{2i} \end{cases}$$

المعادلة الثانية:

$$\begin{cases} Y_{2i} = \beta(\alpha Y_{2i} + \alpha X_{1i} + U_{1i}) + \gamma Y_{1i-1} + U_{2i} \\ (1-\alpha\beta)Y_{2i} = \alpha\beta X_{1i} + \gamma Y_{1i-1} + \beta U_{1i} + U_{2i} \\ Y_{2i} = \left(\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\right)X_{1i} + \left(\frac{\gamma}{1-\alpha\beta}\right)Y_{1i-1} + \left(\frac{\beta}{1-\alpha\beta}\right)U_{1i} + \left(\frac{1}{1-\alpha\beta}\right)U_{2i} \end{cases}$$

اذا الشكل المختزل للنموذج المقدم، هو:

$$\begin{cases} Y_{1i} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\right)X_{1i} + \left(\frac{\alpha\gamma}{1-\alpha\beta}\right)Y_{1i-1} + \left(\frac{1}{1-\alpha\beta}\right)U_{1i} + \left(\frac{1}{1-\alpha\beta}\right)U_{2i} \\ Y_{2i} = \left(\frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\right)X_{1i} + \left(\frac{\gamma}{1-\alpha\beta}\right)Y_{1i-1} + \left(\frac{\beta}{1-\alpha\beta}\right)U_{1i} + \left(\frac{1}{1-\alpha\beta}\right)U_{2i} \end{cases}$$

ونكتب ما يلي:

$$\begin{cases} Y_{1i} = \alpha_1 X_{1i} + \alpha_2 Y_{1i-1} + V_{1i} \\ Y_{2i} = \alpha_3 X_{1i} + \alpha_4 Y_{1i-1} + V_{2i} \end{cases}$$

VII. تقدير نموذج المعادلات الآنية:

ولتقدير معلمات نموذج المعادلات الآنية يمكن استعمال عدة طرق، نذكر من بينها:[1]

أ. طريقة المربعات الصغرى العادية غير المباشرة:

تستخدم هذه الطريقة في تقدير المعادلات المميزة أو المشخصة تماما في نموذج المعادلات الآنية. وبعدها تستخدم طريقة المربعات الصغرى العادية في تقدير معالم الشكل المختزل والحصول على معالم نموذج المعادلات المميزة المراد تقديرها وتتضمن الطريقة المراحل التالية:

- ✓ حساب النموذج بالشكل المختزل، أي التعبير عن المتغيرات الداخلية لجملة المعادلات بدلالة المتغيرات الخارجية والداخلية المتباطئة زمنيا.
- ✓ تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية لتقدير معالم نموذج الشكل المختزل.

[1] P.A.Samualson T.C.Copmans, « Report Of Evaluative Commitee For Econometrica, Econometric », Vol 02, N 02,1954,p132

- ✓ يتم الحصول على مقدرات معالم المعادلات الهيكلية من مقدرات معالم الشكل المختزل الذي يتم الحصول عليه في المرحلة الثانية، وذلك باستخدام العلاقات الرياضية التي تجمع بين معالم الشكل المختزل، ومعالم الشكل العام (الهيكلي).

مثال2:

اعتمادا على معطيات المثال السابق، قدر معالم النموذج باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية الغير مباشرة MCI.

الحل:

تقدير معالم النموذج باستعمال طريقة MCI:

للوصول الى ذلك يجب المرور على المراحل التالية: [1]

المرحلة الأولى: تقدير معلمات الشكل المختزل للنموذج باستعمال طريقة MCO. يعني إيجاد:

$$\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_4$$

المرحلة الثانية: التحويل النموذج من الشكل المختزل إلى الشكل الأصلي، وذلك باستخدام الصيغة العامة للنموذج الآتي:

$$BY + CX = U$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ -\beta & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_{1i} \\ Y_{2i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_{1i} \\ Y_{1i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{1i} \\ U_{2i} \end{bmatrix}$$

المرحلة الثالثة: كتابة الشكل المختزل وتكون كالتالي :

$$Y + B^{-1}CX + B^{-1}U = AX + V$$

ومنه فإن:

$$A = -B^{-1}C$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 & \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\alpha}_3 & \hat{\alpha}_4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & -a \\ -b & 1 \end{bmatrix}^{-1} + \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}$$

$$BA = -C \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -a \\ -b & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 & \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\alpha}_3 & \hat{\alpha}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

[1] Stock,J.H and M.W.Watson, Interpreting the eviden Money Income Causality, Jorunal of econometrics, 1989, vol,40 p122

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_1 - a\hat{\alpha}_3 = a \\ \hat{\alpha}_2 - a\hat{\alpha}_4 = 0 \\ -b\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_3 = 0 \\ -b\hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_4 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{\hat{\alpha}_1}{1+\hat{\alpha}_3} \\ a = \dfrac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_4} \\ b = \dfrac{\hat{\alpha}_3}{\hat{\alpha}_1} \\ c = \hat{\alpha}_4 - \dfrac{\hat{\alpha}_3}{\hat{\alpha}_1}\hat{\alpha}_2 \end{cases}$$

ملاحظة:

- إذا تساوت كل من $\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_4} = \frac{\hat{\alpha}_1}{1+\hat{\alpha}_3}$ فإن a يمكن تحديده،
- أما إذا كان هناك اختلاف $\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_4} \neq \frac{\hat{\alpha}_1}{1+\hat{\alpha}_3}$ فإن a لا يمكن تحديده.

مشاكل طريقة MCI:

لهذه الطريقة مشكلتين رئيسيتين، المشكلة الأولى تتمثل في انه لا يمكن تطبيق هذه الطريقة إلا في المعادلات المميزة. والمشكلة الثانية تتمثل في كون انه يصعب اشتقاق معادلات الشكل المختزل، حيث أنها تتطلب القيام ببعض العمليات الجبرية.

ب. طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين TSLS:

تعتبر طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين من أكثر الطرق استخداما في الدراسات القياسية التطبيقية للحصول على مقدرات متسقة لمعالم نموذج المعادلات الآنية الذي يتم وضعه لمعالجة التأثير المتبادل للمتغير التابع على المتغيرات المستقلة، بحيث أصبح الفرض الذي يتعلق باستقلالية معامل المتغير العشوائي عن المتغير المستقل غير صادق. وتعتبر طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين TSLS من أبسط وأوسع الطرق الخاصة لتقدير المعالم للمعادلات المميزة، وفوق مميزة في نموذج المعادلات الآنية. ويعطي استخدام هذه الطريقة مقدرات تتميز بعدم التحيز، حيث تؤدي إلى نتائج في التفديرات متطابقة مع تلك التي يمكن الحصول عليها باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية غير المباشرة IOLS. وتتفوق طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين TSLS على طريقة المربعات الصغرى العادية غير المباشرة IOLS، كون أنها تعطي أيضا الأخطاء المعيارية للمعالم المقدرة مباشرة، والتي يتعذر الحصول عليها من خلال طريقة المربعات الصغرى العادية غير المباشرة IOLS.[1]

[1] Stock,J.H and M.W.Watson, Interpreting the eviden Money Income Causality, opsit p122

ومن بين الشروط الواجب توفرها عند تطبيق **طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين** TSLS تحقق الفرضيات الآتية:

- ✓ المتغير العشوائي يكون موزع توزيعا طبيعيا أي $U_i \to N(0, \sigma_u^2)$
- ✓ أن تكون عناصر الخطأ العشوائي في معادلات الشكل المختزل مستقلة عن المتغيرات الخارجية والداخلية المتخلفة زمنيا.
- ✓ أن يكون عدد مشاهدات العينة أكبر من عدد المتغيرات الخارجية والداخلية والمتغيرات المتخلفة زمنيا

وتتضمن هذه الطريقة مرحلتين من مراحل التقدير:

المرحلة الأولى: يتم خلالها إجراء انحدار لكل متغير داخلي على مجموعة المتغيرات الخارجية في نظام المعادلات الآنية للحصول على معادلات الشكل المختزل. ونحصل من جراء ذلك على قيمة مقدرة للمتغير الداخلي مرتبطة بصورة أقل مع المتغير العشوائي للمعادلة الهيكلية (الأصلية)، وذلك مقارنة مع ارتباط المتغير الداخلي مع حد المتغير العشوائي الأصلي. ويكون ذلك بالشكل التالي:

$$\begin{cases} Y_{1i} = \alpha_{11}X_{1i} + \alpha_{12}X_{2i} + \cdots + \alpha_{1k}X_{ki} + U_{1i} = \hat{Y}_{1i} \\ Y_{2i} = \alpha_{21}X_{1i} + \alpha_{22}X_{2i} + \cdots + \alpha_{2k}X_{ki} + U_{2i} = \hat{Y}_{2i} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_{ni} = \alpha_{n1}X_{1i} + \alpha_{n2}X_{2i} + \cdots + \alpha_{nk}X_{ki} + U_{ni} = \hat{Y}_{ni} \end{cases}$$

المرحلة الثانية: تستخدم مقدرات معالم المتغيرات الداخلية بدلا عن قيمها الأصلية لتقدير المعادلات الهيكلية (الشكل العام) للنموذج للحصول على مقدرات معالم المتغيرات، وذلك بإحلال مقدرات معالم المتغيرات الداخلية بالقيم الفعلية للمتغيرات الخارجية في معادلات الشكل المختزل. ويعني ذلك الأمر أنه يجري اقصاء الارتباط المتغيرات الخارجية الموجودة على يمين المعادلات الهيكلية مع المتغير العشوائي، مما يجعل مقدرات المربعات الصغرى ذات المرحلتين TSLS متسقة المعالم مع الهيكلية. وإن كانت هذه الطريقة تعطينا تقديرات متحيزة، فإنه إذا تم استخدام بيانات عينة ذات حجم كبير نسبيا سيؤدي إلى الحصول على تقديرات جيدة للمعالم.[1]

$$\begin{cases} Y_{1i} = \beta_{12}\hat{Y}_{2i} + \cdots + \beta_{1n}\hat{Y}_{ni} + \theta_{11}X_{1i} + \theta_{12}X_{2i} + \cdots + \theta_{1k}X_{ki} = U_{1i} \\ Y_{2i} = \beta_{21}\hat{Y}_{1i} + \cdots + \beta_{2n}\hat{Y}_{ni} + \theta_{21}X_{1i} + \theta_{22}X_{2i} + \cdots + \theta_{2k}X_{ki} = U_{2i} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_{ni} = \beta_{n2}\hat{Y}_{ni} + \cdots + \beta_{nn}\hat{Y}_{ni} + \theta_{n1}X_{1i} + \theta_{n2}X_{2i} + \cdots + \theta_{nk}X_{ki} = U_{ni} \end{cases}$$

[1] Engle, Robert F.and C.W.J Ganger "Co integration and Error Correction: Representation Estimation and Testing "Econometrica, 1987 p154

ت. طريقة المعقولية العظمى: Full Information Maximum Likelihood

هذه الطريقة من بين الطرق العامة والتي تستخدم لكل المعادلات وهي تعميم لطريقة الاحتمال الأعظم بالمعلومات المحدودة FIML، وتفترض هذه الطريقة ما يلي:

- أننا نعرف التوصيف لكل معادلات النموذج
- عنصر الاضطراب لكل المعادلات الهيكلية موزعة توزيعا طبيعيا، وغير مرتبطة تسلسليا، أي أن تباينها المشترك يساوي الصفر.

ويمكن تحديد خطوات هذه الطريقة كالاتي:

- ✓ نحدد حدود الاضطراب لكل معادلة
- ✓ تحديد المحدد الجاكوبي لـ $\grave{U}_i$ لكل المعادلات الهيكلية، ونحصل على ذلك من خلال المشتقات الجزئية للمعادلات المحولة بالنسبة ل U_i
- ✓ نطبق قاعدة التحويل للحصول على دالة الاحتمال للعنصر العشوائي (الاضطراب) $U_1, U_2 \dots U_n$.
- ✓ تحديد المشتقات الجزئية لدوال الاحتمال بالنسبة إلى المعلمات الهيكلية $\hat{\beta}$ و$\hat{\gamma}$ وσ_u^2
- ✓ تساوي المشتقات بالصفر، ونحل المعادلات للحصول على المعلمات الهيكلية المجهولة وتباين الأخطاء $\grave{U}_i$.
- ✓ نقدر الخطأ المعياري لتقدير (التباين) لمقدرات المعالم.

مثال3:

مع نموذج الدخل التالي:

$$\begin{cases} C = \alpha_0 + \alpha_1(Y - T) + \alpha_2 Y_{t-1} + U_1 \\ I = \beta_0 + \beta_1 Y + \beta_2 K_{t-1} + \beta_3 r + \beta_4 E + U_2 \\ M = \gamma_0 + \gamma_1 Y + \gamma_2 P_{t-1} + U_3 \\ Y = I + C + G + E - M \end{cases}$$

حيث أن : C: الإنفاق الاستهلاكي، Y: الدخل،

I: الاستثمار، T: الضرائب،

M: الواردات، K_{t-1}: رصيد راس المال،

P_{t-1}: مستوى الأسعار G: الإنفاق الحكومي

E: الصادرات، r: معدل الفائدة

- ونعتبر النموذج متكامل في معادلته الهيكلية، وكذلك أن هناك 7 متغيرات محددة مسبقا، وهي:

$$T, Y, G, E, K, r, P$$

- نوجد الشكل المختزل، بتعويض Y في المعادلات الثلاث الأولى، ونحصل على:

$$C = \alpha_0 + \alpha_1(I + C + G + E - M) + \alpha_1 T + \alpha_2 Y_{t-1} + U_1$$
$$\Rightarrow (1-\alpha_1)C = \alpha_0 + \alpha_1(I + G + E - M - T) + \alpha_2 Y_{t-1} + U_1$$
$$\Rightarrow C = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}(I + G + E - M - T) + \alpha_2 Y_{t-1} + U_1$$
$$I = \beta_0 + \beta_1(I + C + G + E - M) + \beta_2 K_{t-1} + \beta_3 r + \beta_4 E + U_2$$
$$\Rightarrow (1-\beta_1)I = \beta_0 + \beta_1(C + G - M) + \beta_2 K_{t-1} + \beta_3 r + (\beta_1 + \beta_4)E + U_2$$
$$\Rightarrow I = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} + \frac{\beta_1}{1-\beta_1}(C + G - M) + \frac{\beta_2}{1-\beta_1}K_{t-1} + \frac{\beta_3}{1-\beta_1}r + \frac{\beta_1 + \beta_4}{1-\beta_1}E + U_2$$
$$M = \gamma_0 + \gamma_1(I + C + G + E - M) + \gamma_2 P_{t-1} + U_3$$
$$(1-\gamma_1)M = \gamma_0 + \gamma_1(I + C + G + E) + \gamma_2 P_{t-1} + U_3$$
$$M = \frac{\gamma_0}{1-\gamma_1} + \frac{\gamma_1}{1-\gamma_1}(I + C + G + E) + \frac{\gamma_2}{1-\gamma_1}P_{t-1} + U_3$$

- نقوم بإجراء بعض الاستبدالات:

- بالنسبة للمعالم:

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}; \alpha_1 = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}; \alpha_2 = \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}$$
$$\beta_0 = \frac{\beta_0}{1-\beta_1}; \beta_1 = \frac{\beta_1}{1-\beta_1}; \beta_2 = \frac{\beta_2}{1-\beta_1}; \beta_3 = \frac{\beta_3}{1-\beta_1}; \beta_4 = \frac{\beta_4}{1-\beta_1}$$
$$\gamma_0 = \frac{\gamma_0}{1-\gamma_1}; \gamma_1 = \frac{\gamma_1}{1-\gamma_1}; \gamma_2 = \frac{\gamma_2}{1-\gamma_1}$$

- بالنسبة للمتغيرات:

نرمز للمتغيرات الداخلية بالرمز Yi، والمتغيرات المحددة مسبقا بالرمز Z، حيث أن:

$$Y_1 = C; Y_2 = I; Y_3 = M$$
$$Z_1 = G; Z_2 = K_{t-1}; Z_3 = T; Z_4 = Y_{t-1}; Z_5 = r; Z_6 = P_{t-1}$$

- فنحصل على النموذج الهيكلي التالي:

$$\begin{cases} Y_1 = \alpha_0 + \alpha_1(Y_2 + Z_1 + Z_2 - Z_3 - Z_4) + \alpha_2 Z_5 + U_1^* \\ Y_2 = \beta_0 + \beta_1(Y_1 + Z_1 - Y_3) + \beta_2 Z_3 + \beta_3 Z_6 + \beta_4 Z_7 + U_2^* \\ Y_3 = \gamma_0 + \gamma_1(Y_1 + Y_2 + Z_1 - Z_2) + \gamma_3 Z_7 + U_3^* \end{cases}$$

بحيث أنه:

$$U_1^* = \frac{U_1}{1-\alpha_1}; U_2^* = \frac{U_2}{1-\beta_1}; U_3^* = \frac{U_3}{1-\gamma_1}$$

- بإعادة الترتيب نحصل على:

$$\begin{cases} Y_1 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_2 + \alpha_1 Y_3 + \alpha_1 Z_1 + \alpha_1 Z_4 + \alpha_2 Z_5 + U_1^* \\ Y_2 = \beta_0 + \beta_1 Y_1 - \beta_1 Y_3 + \beta_1 Z_1 + \beta_4 Z_2 + \beta_2 Z_3 + \beta_3 Z_6 + U_2^* \\ Y_3 = \gamma_0 + \gamma_1 Y_1 + \gamma_1 Y_2 + \gamma_1 Z_1 - \gamma_1 Z_{2_1} + \gamma_2 Z_7 + U_3^* \end{cases}$$

- وبإهمال α_0 γ_0 β_0 وتحويل المتغيرات إلى انحرافات عن وسطها وباستخدام حدود الاضطراب لـ n قيمة على الانحرافات التي لدينا سنحصل على قيم كل من:

$$U_{1i} = U_{11}, U_{12} \dots \dots U_{1n}$$
$$U_{2i} = U_{21}, U_{22} \dots \dots U_{2n}$$
$$U_{3i} = U_{31}, U_{32} \dots \dots U_{3n}$$

ومنه نقوم بصياغة دالة الاحتمال لـ U_i^*.

الخطوة الأولى: صياغة دالة الاحتمال لـ U_i

$$P(U_{1i}, U_{2i}, U_{3i}) = P(U_{1i}), P(U_{2i}), P(U_{3i})$$

وباستخدام فرضية أن التباين المشترك لحدود الاضطراب معدوم سنحصل على الاحتمالات الآتية:

$$P(U_1) = \left\{\frac{1}{\sigma_{u1}\sqrt{2\pi}}\right\}^n \left[exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sum U_{1i}^2}{\sigma_{u1}^2}\right)\right\}\right]$$
$$P(U_2) = \left\{\frac{1}{\sigma_{u2}\sqrt{2\pi}}\right\}^n \left[exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sum U_{2i}^2}{\sigma_{u2}^2}\right)\right\}\right]$$
$$P(U_3) = \left\{\frac{1}{\sigma_{u3}\sqrt{2\pi}}\right\}^n \left[exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sum U_{3i}^2}{\sigma_{u3}^2}\right)\right\}\right]$$

ومنه فإن الدالة الاحتمالية لكل قيم للنموذج العام (الهيكلي) هو ناتج عن كل هذه الاحتمالات.

$$P(U_1, U_2, U_3) = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\}^{3n} \left\{\frac{1}{\sigma_{u1}\sigma_{u2}\sigma_{u3}}\right\}^n \left[exp\left\{-\left(\frac{\sum U_{1i}^2}{2\sigma_{u1}^2} + \frac{\sum U_{2i}^2}{2\sigma_{u2}^2} + \frac{\sum U_{3i}^2}{2\sigma_{u3}^2}\right)\right\}\right]$$
$$P(U_1, U_2, U_3) = \left\{\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}\right\}^n \left\{\frac{1}{\sigma_{u1}\sigma_{u2}\sigma_{u3}}\right\}^{2n} \left[exp\left\{-\left(\frac{\sum U_{1i}^2}{2\sigma_{u1}^2} + \frac{\sum U_{2i}^2}{2\sigma_{u2}^2} + \frac{\sum U_{3i}^2}{2\sigma_{u3}^2}\right)\right\}\right]$$

الخطوة الثانية: اشتقاق دالة الاحتمال لـ Yi من دالة الاحتمال لـ **U_i** للحصول على الاحتمال الكلي لقيم العينة لكل المتغيرات الداخلية نحتاج إلى :

1) دوال التحويل: وهي عبارة عن المعادلات الهيكلية التي تحل بالنسبة إلى U_3 ،U_2 ،U_1 كالآتي:

$$U_1 = Y_1 - \alpha_1 Y_2 - \alpha_1 Y_3 - \alpha_1 Z_1 - \alpha_1 Z_2 - \alpha_3 Z_4 - \alpha_2 Z_5$$
$$U_2 = Y_2 - \beta_1 Y_1 - \beta_1 Y_3 - \beta_1 Z_1 - \beta_4 Z_2 - \beta_2 Z_3 - \beta_3 Z_6$$
$$U_3 = Y_3 - \gamma_1 Y_1 + \gamma_3 Y_2 - \gamma_1 Z_1 - \gamma_1 Z_2 - \gamma_2 Z_7$$

2) استخراج المحدد الجاكوبي لكل قيم U_i، ويتكون من محدد المشتقات الجزئية لـ U_i بالنسبة إلى Yi ، وهده المحددات في مثالنا، هي:

$$|U|^n = \begin{vmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial Y_1} & \frac{\partial U_1}{\partial Y_2} & \frac{\partial U_1}{\partial Y_3} \\ \frac{\partial U_2}{\partial Y_1} & \frac{\partial U_2}{\partial Y_2} & \frac{\partial U_2}{\partial Y_3} \\ \frac{\partial U_3}{\partial Y_1} & \frac{\partial U_3}{\partial Y_2} & \frac{\partial U_3}{\partial Y_3} \end{vmatrix}^n = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha_1 & \alpha_1 \\ -\beta_1 & 1 & \beta_1 \\ -\gamma_1 & \gamma_1 & 1 \end{vmatrix}^n$$

وإذا قمنا بإيجاد المشتق الجزئي الأول لـ L ، ولنفرض أنه $\frac{\partial L}{\partial \alpha_1}$ يجب أولا الحصول على قيم $\sigma_{u_i}^2$

- نقوم باشتقاق L بالنسبة لـ $\sigma_{u_i}^2$ ، ونحصل على: $\frac{\partial L}{\partial \sigma_{u_i}} = -\frac{n}{\sigma_{u_i}} + \frac{1}{\sigma_{u_i}^2}\sum U_{1i}^2 = 0$

$$\Rightarrow \sigma_{u_1}^2 = \frac{1}{n}\sum U_{1i}^2$$

وبنفس الطريقة نحصل على $\sigma_{u_3}^2 = \frac{1}{n}\sum U_{2i}^2$ و $\sigma_{u_2}^2 = \frac{1}{n}\sum U_{3i}^2$

- نعوض $\sigma_{u_1}^2$، و $\sigma_{u_2}^2$ ، $\sigma_{u_3}^2$ في L فتحصل على:

$$L^* = nlog|J| - nlog\left(2\pi\sqrt{2\pi}\right) - \frac{n}{2}log(\sigma_{u_1}^2\sigma_{u_2}^2\sigma_{u_3}^2) - \frac{3n}{2}$$

$$L^* = nlog|J| - nlog\left(2\pi\sqrt{2\pi}\right) - \frac{n}{2}log(\sigma_{u_1}^2) - \frac{n}{2}log(\sigma_{u_2}^2) - \frac{n}{2}log(\sigma_{u_3}^2) - \frac{3n}{2}$$

نشتق L^* بالنسبة لـ α_1 فنحصل على :

$$\frac{\partial L^*}{\partial \alpha_1} = -\left(\frac{n}{|J|}\right)\left(\frac{\partial |J|}{\partial \alpha_1}\right) - \left(\frac{n}{2\sum U_{1i}^2}\right)\frac{\partial \sum U_{1i}^2}{\partial \alpha_1} = 0$$

$$= \left(\frac{n}{|J|}\right)\left(\frac{\partial |J|}{\partial \alpha_1}\right) - \left(\frac{n}{2\sum U_{1i}^2}\right)\left(2\sum U_{1i}\right)\frac{\partial U_{1i}}{\partial \alpha_1} = 0$$

3) نحلل المحدد الجاكوبي إلى:

$$|J| = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha_1 & \alpha_1 \\ -\beta_1 & 1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & -\gamma_1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & 1 \end{vmatrix} + \alpha_1 \begin{vmatrix} -\beta_1 & \beta_1 \\ -\gamma_1 & 1 \end{vmatrix} + \alpha_1 \begin{vmatrix} -\beta_1 & 1 \\ -\gamma_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}$$

$$= (1 + \beta_1\gamma_1) + \alpha_1(-\beta_1 + \gamma_1 + 2\beta_1\gamma_1)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial |J|}{\partial \alpha_1} = - - \beta_1 + \gamma_1 + 2\beta_1\gamma_1$$

وباستعمال قاعدة التحويل نحصل على دالة الاحتمال لـ Y، كالآتي:

$$P(Y_1, Y_2, Y_3) = P(U_{1i}, U_{2i}, U_{3i}) \left| \frac{\partial(U_{1i}, U_{2i}, U_{3i})}{\partial(Y_1, Y_2, Y_3)} \right|$$

وبالتعويض نحصل على:

$$L = |J|^n \left\{ \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}} \right\}^n \left\{ \frac{1}{\sigma_{u1}\sigma_{u2}\sigma_{u3}} \right\}^{2n} \left[exp\left\{ -\left(\frac{\sum U_{1i}^2}{2\sigma_{u1}^2} + \frac{\sum U_{2i}^2}{2\sigma_{u2}^2} + \frac{\sum U_{3i}^2}{2\sigma_{u3}^2} \right) \right\} \right]$$

وبإدخال اللوغاريتم ذو الأساس e، نحصل على:

$$logL = nlog|J| - nlog2\pi\sqrt{2\pi} - nlog(\sigma_{u1}\sigma_{u2}\sigma_{u3}) - \frac{1}{2\sigma_{u1}^2}\sum U_{1i}^2 - \frac{1}{2\sigma_{u2}^2}\sum U_{2i}^2 - \frac{1}{2\sigma_{u3}^2}\sum U_{3i}^2$$

وهي دالة الاحتمال المشترك لعينة المتغيرات الداخلية باستخدام المتغيرات المحددة مسبقا.

الخطوة الثالثة: لأجل تعظيم دالة الاحتمال نقوم بأخذ المتغيرات الجزئية بالنسبة لـ αو β، وتباين σ_{U_i} ونعادلها بالصفر، بحيث أن:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \alpha_1} = 0, & \frac{\partial L}{\partial \beta_1} = 0, & \frac{\partial L}{\partial \beta_3} = 0, & \frac{\partial L}{\partial \gamma_1} = 0, & \frac{\partial L}{\partial \sigma_{u1}} = 0, & \frac{\partial L}{\partial \sigma_{u3}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha_2} = 0, & \frac{\partial L}{\partial \beta_2} = 0, & \frac{\partial L}{\partial \beta_4} = 0, & \frac{\partial L}{\partial \gamma_2} = 0, & \frac{\partial L}{\partial \sigma_{u2}} = 0 \end{cases}$$

وبتوحيد المشتقات الجزئية نحصل على المعادلات العامة الآتية:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \alpha_1} = n\frac{1}{|J|}\frac{\partial J}{\partial \alpha_1} + \sum \frac{\partial L}{\partial U_1}\frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \beta_1} = n\frac{1}{|J|}\frac{\partial J}{\partial \beta_1} + \sum \frac{\partial L}{\partial U_2}\frac{\partial U_1}{\partial \beta_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \gamma_1} = n\frac{1}{|J|}\frac{\partial J}{\partial \gamma_1} + \sum \frac{\partial L}{\partial U_3}\frac{\partial U_1}{\partial \gamma_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \sigma_{u_i}} = n\frac{1}{\partial \sigma_{u_i}} + \frac{1}{\partial \sigma_{u_i}^2}\sum U_i^2 = 0 \end{cases}$$

ولدينا: $U_1 = Y_1 - \alpha_1 Y_2 + \alpha_1 Y_3 - \alpha_1 Z_1 - \alpha_1 Z_2 + \alpha_1 Z_4 - \alpha_1 Z_5$

$$\Rightarrow \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} = -\ Y_1 - Y_3 - Z_1 - Z_2 + Z_4$$

وبالتعويض نحصل على :

$$\frac{n(-\beta_1 + \gamma_1 + 2\beta_1\gamma_1)}{1 + \beta_1\gamma_1 + \alpha_1(-\beta_1 + \gamma_1 + 2\beta_1\gamma_1)} - \frac{n\sum[Y_1 - \alpha_1(Y_2 + Y_3 - Z_1 - Z_2 + Z_4) - \alpha_2 Z_5][-Y_2 + Y_3 - Z_1 - Z_2 + Z_4]}{\sum[Y_1 - \alpha_1(Y_2 + Y_3 - Z_1 - Z_2 + Z_4) - \alpha_2 Z_5]^2}$$

ومنه نحصل على:

$$\frac{n(-\beta_1+\gamma_1+2\beta_1\gamma_1)}{1+\beta_1\gamma_1+\alpha_1(-\beta_1+\gamma_1+2\beta_1\gamma_1)}\sum[Y_1-\alpha_1(Y_2+Y_3-Z_1-Z_2+Z_3)-\alpha_2Z_5]^2$$

$$\sum=[Y_1-\alpha_1(Y_2+Y_3-Z_1-Z_2+Z_4)-\alpha_2Z_5]\,(Y_2+Y_3-Z_1-Z_2+Z_3)-\alpha_2Z_5$$

وهكذا بالنسبة للمعلمات الهيكلية $\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_4$ ومنها نحصل على $\hat{\alpha}_i,\hat{\beta}_i,\hat{\gamma}_i$ وعند الحل نحصل على $\hat{\sigma}^2_{u_1},\hat{\sigma}^2_{u_2},\hat{\sigma}^2_{u_3}$

وتوجد طرق أخرى لعملية تقدير معالم نموذج المعادلات الآنية، نذكر من بينها ما يلي:

- 1-طريقة المتغير الأدائي
- طريقة المربعات الصغرى ذات ثلاث مراحل
- طريقة المعلومات الكاملة للاحتمال الاعظم
- طريقة المربعات الصغرى النسبية

VIII. سلسلة تمارين 04

التمرين الأول: إذا كان لدينا المعادلتين التاليتين:

$$\begin{cases} Q_d = \alpha_0 + \alpha_1 P + u_1 \\ Q_s = \beta_0 + \beta_1 P + Y + u_2 \\ Q_d = Q_s \end{cases}$$

حيث أن : Q: تمثل الكمية ، P : تمثل السعر، Y: تمثل الدخل

- هل يعد النموذج المقدم من نماذج المعادلات الآنية، ولماذا؟
- حدد المتغيرات الخارجية والداخلية في النموذج؟
- أوجد الشكل المختزل للنموذج؟
- هل يمكن تقدير معاملات النموذج بطريقة OLS؟، ولماذا؟

تمرين الثاني: بإستخدام النموذج الآني:

$$\begin{cases} Y_1 = \beta_{12} Y_2 + \alpha_{11} X_1 + \alpha_{13} X_3 \\ Y_2 = \beta_{21} Y_1 + \alpha_{22} w_1 + \alpha_{23} X_3 \end{cases}$$

- إيجاد الشكل المختزل للنموذج؟
- تحديد شروط التشخيص.

التمرين الثالث: إذا أعطيت المعادلات الآنية الآتية:

$$\begin{cases} C_i = \beta_0 + \beta_1 Y_i + \beta_2 Y_{i-1} + u_i \\ Y_i = C_i + I_i \end{cases}$$

حيث: Y_i, C_i, I_i تمثل الإنفاق المستهلك، الدخل والاستثمار على التوالي.

- اشتق الصيغة المختزلة لكل من Y وC؟

التمرين الرابع: افترض أنك قمت بتكوين النموذج الآتي:

$$\begin{cases} C_i = \alpha_0 + \alpha_2 Y_i + E_i \\ C_i = \beta_1 + \beta_2 Y_i + \beta_3 G_{i-1} + u_i \\ Y_i = C_i + I_i + G_i \end{cases}$$

- أوجد نظام الشكل المختزل للنموذج؟
- حدد المتغيرات الداخلية والخارجية؟
- بين هل دالة الاستهلاك مشخصة أو فوق مشخصة، ولماذا؟

المراجع:

- مجيد حسين عفاف سعيد الاقتصاد القياسي النظرية والتطبيق، دار وائل للنشر، الأردن 1998، ط1،
- عبد القادر محمد عطية" مقدمة في الاقتصاد القياسي، الرياض، النشر العلمي والمطابع، 2001
- أموري هادي كاظم الحسناوي، طرق القياس الاقتصادي (عمان، دار وائل للنشر، 2002)،
- شيخي محمد طرق الاقتصاد القياسي محارات وتطبيقات الجزائر، دار الحامد، الطبعة الاولى 2011،
- صالح تومي، مدخل لنظرية القياس الاقتصادي، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر،1999
- طارق محمد الرشيد، المرشد في لاقتصاد القياسي التطبيقي، الخرطوم، جي تاون، الطبعة الاولى، 2005.
- عبد الحميد البلداوي، الإحصاء للعلوم الإدارية والتطبيقية (عمان) دار الشروق للنشر والتوزيع،1997)
- عبد القادر محمد عبد القادر عطية الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق، ط (2)، الإسكندرية: الدار الجامعية، 2000،
- عبد القادر محمد عبد القادر، " طرق قياس العلاقات الاقتصادية مع تطبيقات على الحاسوب الالكتروني الإسكندرية دار الجامعات المصرية، 1990
- عصام عزيز شريف، مقدمة في القياس الاقتصادي، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1981. –
- عزالدين مالك الطيب محمد، المدخل الى القتصاد القياسي، الجزء الاول، نموذج المعادلة الواحدة ومشاكل القياس، مطبعة تاون الخرطوم 2008
- مولود حشمان، نماذج وتقنيات التنبؤ على المدى القصير OPU، الجزائر؛ 2002
- هاري كلجيان والاس اوتس ترجمة المرسي السيد حجازي، محمد عبد القادر عطية، مقدمة في الاقتصاد القياسي: المبادئ والتطبيقات النشر العلمي والمطابع المملكة العربية السعودية، 2001 –
- وليد اسماعيل السيفو، فيصل مفتاح شلوف صائب جواد ابراهيم اساسيات الاقتصاد التحليلي،دار الاهلية للنشر والتوزيع، الاردن، 2006.
- la modélisation structurelle" (Lyon : Presse universitaire, 1985 Bourbonnais R, Econométrie, 9emeEdition, Dunod, Paris, 2015.
- Bourbonnais R., Econométrie, 3 éme édition, Dunod, Paris, 2003
- Engle, Robert F.and C.W.J Ganger "Co integration and Error Correction: Representation Estimation and Testing "Econometrica, 1987.
- Nelson C.and Pollser, Trends and Random Walkes in Macroeconomic Time Series: Some Evidens and Implication Journal of money economics,1989, vol,10.
- P.A.Samualson T.C.Copmans, « Report Of Evaluative Commitee For Econometrica, Econometric », Vol 02, N 02,1954,
- Stock,J.H and M.W.Watson, Interpreting the eviden Money Income Causality, Jorunal of econometrics, 1989, vol,40